LETZTE ÜBUNG ZUR VORLESUNG „FUNKTIONENTHEORIE“ IM SOMMERSEMESTER 2011

CARSTEN SCHULTZ, CHRISTOPHER WULFF

Aufgabe 41. Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen mit genau einem Häufungspunkt b. Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ existiert, deren Nullstellen genau die a_n sind. Lässt sich sagen, welcher Art die Singularität b ist?

Tipp. Nehmen wir zunächst an, dass (a_n) beschränkt ist, so ist $\lim_n a_n = b$. Für den Fall, dass $\lim_n a_n = \infty$ haben wir den Weierstraßschen Produktsatz...

Aufgabe 42. Es sei f eine ganze Funktion, die an jeder ganzen Zahl eine einfache Nullstelle und keine weiteren Nullstellen hat. Zeigen Sie, dass eine ganze Funktion g existiert, so dass

$$f(z) = \exp(g(z))\, z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Tipp. Wenn man festgestellt hat, dass das Produkt eine holomorphe Funktion mit den richtigen Nullstellen darstellt, erledigt Aufgabe 24 den Rest.

Aufgabe 43. Es seien auf $U = \{z\colon |z| > 4\}$ holomorphe Funktionen f und g durch

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}, \qquad g(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

gegeben. Welche der Funktionen f, g haben auf U eine Stammfunktion?

Aufgabe 44. Es sei

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z^2 - \pi^2)^3}.$$

Bestimmen Sie

(i) den Konvergenzradius der Taylorreihe von f bei 0 und
(ii) die Singularitäten von f und ihre Hauptteile.

Abgabe: bis zum 27. Juli.

Allgemeiner Tipp. Nachdem das letzte Übungsblatt bearbeitet ist, mag es lehrreich, noch einmal alle Aufgaben durchzuschauen. Was verstehen wir inzwischen besser, wofür hätten wir nun einen Satz oder eine Methode? Ist das erste Blatt so lange her, dass inzwischen alles vergessen ist? Müssten wir für Aufgabe 6 immer noch rechnen? Was zählt das Integral in Aufgabe 8? (Das wussten wir damals nur halb, und auch nur für Polynome.) Wie oft haben wir 11(ii) inzwischen eigentlich ausgerechnet? War das nicht eine Möbiustransformation, die wir beim Beweis von Aufgabe 12 benutzt haben? Auf wie viele Arten können wir Aufgabe 17 nun lösen? Aufgabe 19? War die nicht gerade eben schon? Hätten wir Aufgabe 20 eigentlich auch (falls nicht damals schon geschehen) mit der Integralformel für die Laurentkoeffizienten lösen können? Die Aussage von Aufgabe 22 ist uns schon ins Blut übergegangen, oder? Die Umlaufzahl in Aufgabe 27 zählt doch etwas, und hat das nicht etwas mit dem Satz von Rouché zu tun? Der Rest ist dann ja noch nicht so lange her.