9. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „FUNKTIONENTHEORIE“ IM SOMMERSEMESTER 2011

CARSTEN SCHULTZ, CHRISTOPHER WULFF

Aufgabe 33. Berechnen Sie:

(i)
$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

(ii)
$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^3-x}\,dx$$

(iii)
$$\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$$

(iv)
$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\Theta)^2}{2+\sin(\Theta)}\,d\Theta$$

Aufgabe 34. Berechnen Sie die Fouriertransformation
$$\hat{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}f(x)\,dx$$
($k\in\mathbb{R}$) der beiden folgenden Funktionen.

(i)
$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

(ii)
$$f(x)=e^{-x^2}$$

Tipp. Bei (i) muss eine Fallunterscheidung bzgl. des Vorzeichens von k durchgeführt werden. Bei (ii) muss eine „Substitution“ $z=x+ik/2$ vorgenommen werden. Dabei handelt es sich natürlich nicht um eine Substitution im bekannten Sinne, da $ik/2$ nicht reell ist. Begründen Sie mit Mitteln aus der Funktionentheorie, warum diese Methode trotzdem zum richtigen Ergebnis führt. Das bestimmte Integral $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ darf als bekannt vorausgesetzt werden.

Abgabe: bis zum 13. Juli.

Aufgabe 35. $f(z) = p(z)/q(z)$ sei eine rationale Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Polynomen $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ und $q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$, sodass $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ sowie $n < m$. Bestimmen Sie die Summe aller Residuen von f in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 36. Gegeben sei ein Polynom $z^n + bz^k + c$ mit $0 < k < n$ und $b, c \neq 0$.

(i) Angenommen, wir haben $R > r > 0$, sodass $|z^n| > |bz^k + c|$ für $|z| = R$ und $|c| > |z^n + bz^k|$ für $|z| = r$. In welchem Gebiet liegen dann nach dem Satz von Rouché die Nullstellen des Polynoms?

(ii) Was kann man über die Lage der Nullstellen sagen, wenn es ein $\rho > 0$ gibt, sodass $|bz^k| < |z^n + c|$ bzw. $|bz^k| > |z^n + c|$ für alle $|z| = \rho$?

(iii) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von
  (a) $z^8 - 3z^2 + 1$ im Gebiet $|z| > 1$,
  (b) $z^7 - 5z^3 + 7$ im Gebiet $1 < |z| < 2$.