

Homologische Methoden für diskrete Strukturen

Carsten Schultz

carsten@codimi.de

Sommersemester 2007, TU Berlin

Language

The lectures will be held **in English**.

Format

Vorlesung, 2-stündig, keine Scheine. Übungen sind nicht vorgesehen, aber auf Eigeninitiative der Hörer denkbar.

Termin

Mittwoch **16–18**, MA 645.

Ziel

Ziel der Vorlesung ist es, Begriffe der Homologischen Algebra im Kontext der diskreten Mathematik einzuführen. Dabei sollen vor allem Begriffe und Methoden kennen gelernt werden, das Augenmerk liegt weniger auf konkreten Ergebnissen.

Voraussetzungen

Konkret wird nichts außer elementaren Eigenschaften von Moduln über Ringen vorausgesetzt und auch davon nichts, was sich bei ausreichender mathematischer Reife nicht schnell aneignen ließe. Letztere wird allerdings insgesamt nötig sein.

Topologische Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt; sollten sie bei den Hörern vorhanden sein, wird uns das aber mehr Beispiele und Abschweifungen erlauben.

Inhalt

Im ersten Teil der Vorlesung lernen wir eine algebraische untere Schranke an die chromatische Zahl eines Graphen kennen und bestimmen diese für einige Graphen. Dazu führen wir Kettenkomplexe, Kettenhomotopie und Homologie ein. Wir begegnen Auflösungen und der Homologie einer Gruppe als einem abgeleiteten Funktor.

Der zweite Teil der Vorlesung dreht sich um Halbordnungen (Posets). Wir führen die Homologie von Posets und Methoden der Berechnung, darunter Spektralsequenzen, ein. Dabei führen wir das Projekt aus dem ersten Teil zu Ende und wenden die Schranke auf Knesergraphen an, für die Lovász ursprünglich ein topologisches Analogon dieser Schranke eingeführt hatte, so dass wir einen vollständig algebraisch-kombinatorischen Beweis der Kneservermutung erhalten. Wir betrachten Diagramme von Kettenkomplexen über Posets, diskutieren freie Diagramme und erkennen, dass sich auch Poset-Homologie als abgeleiteter Funktor auffassen lässt.

Um nicht zu altmodisch zu erscheinen, erwähnen wir auch derivierte Kategorien, entwickeln deren Theorie aber nicht. Diagramme über Halbordnungen sind auch die Basis neuerer Resultate über torische h -Vektoren von Polytopen. Diese würden sich als Thema für eine spätere Veranstaltung anbieten.