Lieferung 1

Metrische Räume und Homöomorphie

Metrische Räume

Eine ebenso richtige wie nichtssagende Antwort auf die Frage, was denn Topologie sei, wäre „das Studium stetiger Abbildungen." Stetigkeit kennen wir bisher als Eigenschaft von Funktionen zwischen Teilmengen des euklidischen Raums oder allgemeiner zwischen metrischen Räumen.

1.1. Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Funktion $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, so dass

(i) $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x, y \in X$ *(Symmetrie)*,

(iii) $d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$ für alle $x, y, z \in X$ *(Dreiecksungleichung)*.

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X,d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf ihr.

Wir werden den metrischen Raum (X,d) nur mit X bezeichnen, wenn keine Verwechslungsmöglichkeit besteht.

1.2. Beispiele und Definitionen.

▷ Der *euklidische Raum* $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik $d(x,y) = \left(\sum_k (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ist wohl der metrische Raum, den wir am besten kennen. Wenn wir von dem $\mathbb{R}^n$ als metrischen Raum reden, ohne näher die Metrik zu bestimmen, werden wir immer diese meinen.

▷ Ist (X,d) ein metrischen Raum und $Y \subset X$, so ist auch $(Y, d|_{Y\times Y})$ ein metrischer Raum. Insbesondere können wir also jede Teilmenge eines euklidischen Raumes als metrischen Raum auffassen.

▷ Eine beliebige Menge X wird durch die *diskrete Metrik*

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

zu einem (nicht sehr spannenden, aber durchaus wichtigen) metrischen Raum.

1.3. Definition (Stetigkeit). Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Ist $x \in X$, so heißt f *stetig in* x, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, ein $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ exisitiert, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt, dass $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist.

Für ein paar wichtige Teilmengen von euklidischen Räumen legen wir Bezeichnungen fest.

1.4. Notation. Es sei

$$I := \{x \in \mathbb{R}\colon 0 \leq x \leq 1\}$$

das Einheitsintervall und für $n \in \mathbb{N}$

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

die n-dimensionale Scheibe (auch Ball oder Kugel genannt) und

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

die n-dimensionale Sphäre, wobei $\|\bullet\|$ die euklidische Norm bezeichne.

Homöomorphie

In der Topologie betrachtet man Räume meist nur bis auf Homöomorphie, eine Äquivalenzrelation, die wir jetzt definieren.

1.5. Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt ein *Homöomorphismus*, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Zwei Räume X und Y heißen *homöomorph*, $X \approx Y$, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Etwas direkter ausgedrückt ist ein Homöomorphismus also eine stetige Bijektion, deren Umkehrfunktion auch stetig ist.

1.6. Beispiel. Man betrachte $I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \in I \text{ für alle } k\}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} &I^n \to D^n \\ &x \mapsto \begin{cases} 2\frac{x-(1/2,1/2,\dots,1/2)}{\|x-(1/2,1/2,\dots,1/2)\|} \max_k |x_k - 1/2|, & x \neq (1/2, 1/2, \dots, 1/2), \\ 0, & x = (1/2, 1/2, \dots, 1/2), \end{cases} \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus mit inverser Abbildung

$$\begin{aligned} &D^n \to I^n \\ &x \mapsto (1/2, 1/2, \dots, 1/2) + \begin{cases} \frac{x}{2\max_k |x_k|} \|x\|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

wie man durch Nachrechnen feststellt.

1.7. Beispiel. Die Abbildung

$$\begin{aligned} [0, 2\pi) &\to S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ x &\mapsto (\sin x, \cos x) \end{aligned}$$

ist stetig und bijektiv, aber *kein* Homöomorphismus, denn die Umkehrabbildung ist bei $(0, 1) \in S^1$ unstetig. In der Tat sind $[0, 2\pi)$ und S^1 nicht homöomorph; um das zu zeigen, könnte man die Kompaktheit von S^1 ausnutzen, oder dass $[0, 2\pi)$ einen Randpunkt hat, S^1 aber nicht, oder dass S^1 nie in zwei Teile zerfällt, wenn man einen Punkt herausnimmt, oder ... Zu alledem später mehr.

1.8. Beispiel. Man betrachte einen Doughnut[1] und eine Kaffeetasse als Unterräume des $\mathbb{R}^3$. Diese sind homöomorph, wie wir jetzt andeuten wollen. Zunächst schlagen wir von der Tasse den Henkel ab, markieren aber auf beiden Teilen die Bruchstelle. Ebenso schneiden wir den Doughnut so in zwei Teile, dass jeder von ihnen wie ein Henkel aussieht. Nun gibt es schon einmal einen Homöomorphismus von dem Tassenhenkel zu der einen Doughnuthälfte, der Bruchstelle auf Schnittstelle abbildet. Die zweite Doughnuthälfte ist ein (gebogener) Zylinder, also, da wir ja bereits in Beispiel 1.6 gesehen haben, dass Kanten nichts ausmachen, ein Ball. Von dem von der Tasse übriggebliebenen Becher bemerken wir, dass er auch bis auf Homöomorphie nichts anderes ist als ein Ball, auch wenn er recht platt ist und gebogen im $\mathbb{R}^3$ liegt. Nun gibt es zwischen diesen beiden Stücken also wieder einen Homöomorphismus, und zwar sogar einen, der wieder Bruchstelle auf Schnittstelle abbildet. Das ganze lässt sich so einrichten, dass die beiden Homöomorphismen an der Bruch- beziehungsweise Schnittstelle zusammenpassen und so einen Homöomorphismus von der Tasse zum Doughnut liefern.

[1] Man verzeihe die Amerikanisierung. Natürlich gibt es auch deutsches Gebäck gleicher Form, und das schmeckt sicher auch zu Kaffee.

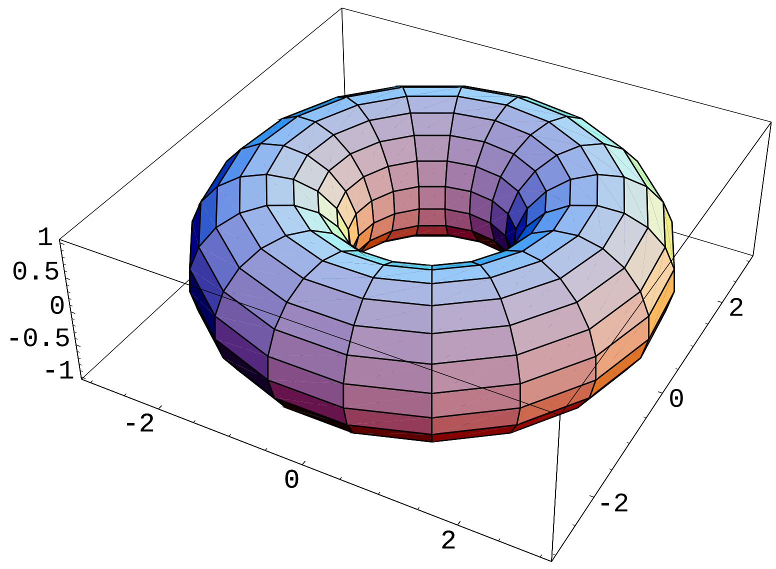

Abbildung 1.1: Torus in Mathematica

1.9. Beispiel. Den Doughnut aus dem letzten Beispiel nennen wir üblicherweise den Volltorus, seinen Rand den Torus. Als Rotationskörper im $\mathbb{R}^3$ erhält man sie zum Beispiel als

$$\{(x \sin\phi, x\cos\phi, y) \colon (x, y, \phi) \in \mathbb{R}^3, (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

für den Volltorus und

$$\{(x \sin\phi, x\cos\phi, y) \colon (x, y, \phi) \in \mathbb{R}^3, (x-2)^2 + y^2 = 1\}$$

für den Torus, man vergleiche mit Abbildung 1.1, die die Mathematica–Ausgabe für

```
ParametricPlot3D[
    {Sin[phi](Sin[rho] + 2), Cos[phi](Sin[rho] + 2), Cos[rho]},
                                        {phi, 0, 2Pi}, {rho, 0, 2Pi}]
```

zeigt. Hier wurde also auch noch $\{(x, y) \colon (x-2)^2 + y^2 = 1\}$ durch $(\sin\rho + 2, \cos\rho)$ parametrisiert.

Natürlicher jedoch erhält man diese Räume als Teilmengen des $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, nämlich den Volltorus als $S^1 \times D^2$ und den Torus als $S^1 \times S^1$. Ein Homöomorphismus ist in beiden Fällen die Einschränkung der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto ((x_3 + 2)x_1, (x_3 + 2)x_2, x_4) \end{aligned}$$

und die Umkehrabbildung die Einschränkung von

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2, x_3 \right)\end{aligned}$$

Das Nachrechnen ist lästig, aber elementar.

1.10. Beispiel. Ist X eine Menge, auf der zwei Metriken d und d' definiert sind, und gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass $d'(x,y) \leq Cd(x,y)$ für alle $x, y \in X$, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} i\colon (X,d) &\to (X,d') \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

stetig (setze $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$); gibt es außerdem ein $C' > 0$, so dass $d(x,y) \leq C'd'(x,y)$, so ist i ein Homöomorphismus. Dies lässt sich auf die Metriken $d_p(x,y) := (\sum_k |x_k - y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$ und $d_\infty(x,y) := \max_k |x_k - y_k|$ auf $\mathbb{R}^n$ anwenden, die also alle homöomorphe Räume liefern, denn es ist ja

$$d_\infty(x,y) \leq d_p(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n d_\infty(x,y).$$

1.11. Beispiel. Die Abbildung $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus, denn sie ist stetig und hat die stetige Umkehrabbildung arctan.

Das letzte Beispiel zeigt, dass Vollständigkeit keine Eigenschaft ist, die von einem Homöomorphismus erhalten bleibt: $\mathbb{R}$ ist vollständig, aber das offene beschränkte Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ nicht. Das liegt daran, dass stetige Abbildungen im allgemeinen Cauchy-Folgen nicht auf Cauchy-Folgen werfen, das ist nur für gleichmäßig stetige Funktionen der Fall.

Die letzten beiden Beispiele zeigen, dass eine Metrik viel mehr Information trägt, als man wirklich braucht, wenn man nur an Eigenschaften interessiert ist, die unter Homöomorphie erhalten bleiben. Eine wesentlichere Rolle als die Metrik selbst werden die offenen Mengen spielen, die von ihr bestimmt werden.

Offene Mengen

1.12. Definition. Sei X ein metrischer Raum. Für $\varepsilon > 0$ ist die *ε-Umgebung* eines Punktes $x \in X$ die Menge $B_\varepsilon(x) := \{x' \in X : d(x,x') < \varepsilon\}$. Eine beliebige Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *offen*, wenn sie Umgebung eines jeden der Punkte ist, die sie enthält.

1.13. Bemerkungen.

- ▷ Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort, dass $B_\varepsilon(x)$ offen ist.
- ▷ Wir haben den Begriff der offenen Menge mit Hilfe des Begriffes der Umgebung definiert. Andersherum gilt: Eine Menge U ist Umgebung von x, wenn eine offene Menge O existiert, so dass $x \in O \subset U$. Beachte, dass wir, im Gegensatz zu einigen Autoren, nicht fordern, dass U selbst offen ist.

1.14. Beispiel. Ist X mit der diskreten Metrik versehen, so gilt für jedes $x \in X$, dass $B_{1/2}(x) = \{x\}$ ist, also ist $\{x\}$ eine Umgebung von x und *jede* Teilmenge von X offen.

Um stetige Abbildungen zu beschreiben, genügt es völlig, die offenen Mengen der beteiligten Räume zu kennen.

1.15. Proposition. *Seien X, Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) f ist stetig.

(ii) Für jede offene Menge $U \subset Y$ ist auch $f^{-1}[U]$ offen.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei f stetig und $U \subset Y$ offen. Sei $x \in f^{-1}[U]$, also $f(x) \in U$. Da U offen ist, gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nun ein $\delta > 0$, so dass $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x))$. Das heißt, dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}[U]$; also ist, da x beliebig gewählt war, $f^{-1}[U]$ offen.

„$\Leftarrow$“: Sei f nicht stetig. Dann existiert ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta > 0$ ein $x' \in B_\delta(x)$ gibt, so dass $f(x') \notin B_\varepsilon(f(x))$. Es gibt also kein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ wäre. $f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ ist also keine Umgebung von x und damit nicht offen, obwohl $B_\varepsilon(f(x))$ offen ist. □

1.16. Korollar. *Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn f bijektiv ist und für alle Mengen $M \subset X$ gilt, dass $f[M]$ genau dann offen ist, wenn M offen ist.* □

Die offenen Mengen sind also tatsächlich, worauf es ankommt, wenn man Räume bis auf Homöomorphie betrachtet. Die folgenden Eigenschaften der Familie der offenen Mengen eines metrischen Raumes sind so fundamental, dass wir sie bald zu Definitionen erheben werden.

1.17. Proposition. *In einem metrischen Raum X gilt:*

(i) Der Schnitt einer endlichen Menge von offenen Mengen ist offen.

(ii) Die Vereinigung einer beliebigen Menge von offenen Mengen ist offen.

(iii) Sind $x, y \in X$ und ist $x \neq y$, so existieren offene Mengen $U, V \subset X$ mit $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

Beweis. Zu (i): Seien $U_1, \ldots, U_r$ offen, $r \in \mathbb{N}$, und sei $x \in \bigcap_k U_k$. Dann gibt es $\varepsilon_k > 0$, so dass $B_{\varepsilon_k}(x) \subset U_k$. Mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_k\}$ ist $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_k U_k$.

Zu (ii): Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$, und U offen für alle $U \in \mathcal{U}$. Sei nun $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $x \in U$, und damit ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \in U \subset \bigcup \mathcal{U}$.

Zu (iii): Ist $x \neq y$, so ist $\varepsilon := d(x, y)/2 > 0$. Sei nun $z \in B_\varepsilon(x)$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung $z \notin B_\varepsilon(y)$. Also ist $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$. □

Literatur

Das Buch zu dem Stoff, der bei uns in Topologie I behandelt wird, zu empfehlen, fällt schwer. Wahrscheinlich gibt es deshalb eine so große Zahl an Skripten zur Topologie I an diesem Fachbereich, denen ich hier zu allem Überfluss auch noch eines hinzufüge. Die, die ich kenne, möchte ich sogleich empfehlen: Das von Koppelberg, mit dem ich gelernt habe, das von Heindorf und die beiden von Unsöld, von denen mir besonders das ältere zusagt.

Meine erste Buchempfehlung sei eine, die hier eigentlich inhaltlich nicht herpasst. Das Buch von Bredon [Bre93] ist eines über algebraische Topologie, aber fast alles von dem, was wir hier tun werden, ist dort in den Kapiteln 1 und 3 enthalten. Sollte jemand so voller Tatendrang sein, dass er sich jetzt schon sicher ist, auch Topologie II und III zu hören, so kann er sich eigentlich auch überlegen, sich dieses Buch gleich zuzulegen.

Drei Bücher, die sich eher an die Hörer dieser Vorlesung richten, sind [Que73], [Jän80] und [Mun75]. Querenburg behandelt auf wenig Raum viel mengentheoretische Topologie, enthält aber im Gegensatz zu den anderen beiden Bänden kein Material über die Fundamentalgruppe. Jänichs Buch enthält auch viele erhellende Passagen mit erzählendem Charakter, es wird sich daher wohl auch schon auf Nachttischen und nicht nur auf Schreibtischen wiedergefunden haben. Über das Buch von Munkres kann ich nicht viel sagen, es scheint aber inhaltlich gut zu unserer Vorlesung zu passen.

Wem das alles zu wenig abstrakt ist, der findet wie immer bei Bourbaki Hilfe. Von [Bou65] werden wir nur Kapitel 1 und 9 benötigen. Ein ‚echtes' Buch über mengentheoretische Topologie ist Engelkings Werk [Eng77], in dem man angeblich alles findet.

Ein Buch einer ganz anderen Art ist das von Steen und Seebach. Sucht man einen Raum mit Eigenschaften α und β aber weder γ noch δ, so hat man gute Chancen, ihn in [SS70] zu finden.

[Bou65] Bourbaki, N. *Topologie Général*, Bd. 3 von *Éléments de mathématique*. Hermann, Paris, 1965.

[Bre93] Bredon, G. E. *Topology and Geometry*, Bd. 139 von *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1993.

[Eng77] Engelking, R. *General Topology*. PWN, Warszawa, 1977.

[Jän80] Jänich, K. *Topologie*. Springer-Verlag, 1980.

[Mun75] Munkres, J. R. *Topology: a first course*. Prentice-Hall, 1975.

[Que73] von Querenburg, B. *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, 1973.

[SS70] Steen, L. A. und Seebach, J. A., Jr. *Counterexamples in Topology*. Holt, Rinehart and Winston, 1970.