Lieferung 11

Reellwertige Funktionen

In diesem Abschnitt behandeln wir Räume, die in gewisser Hinsicht viele stetige reellwertige Funktionen zulassen. Zunächst zeigen wir, dass normale Räume zu diesen gehören. Danach betrachten wir vollständig reguläre Räume, eine Klasse von Räumen, die per Definition viele stetige reellwertige Funktionen zulassen. Sehr spezielle reellwertige Funktionen sind Metriken; ein einfacher Metrisationssatz für vollständig reguläre Räume schließt sich an.

Normale Räume

Wir formulieren zunächst die Trennungseigenschaft T_4 analog zu Proposition 10.5 um.

11.1. Proposition. *Ein Raum X ist genau dann ein T_4-Raum, wenn für jede abgeschlossene Menge A und jede offene Menge O mit $A \subset O$ eine offene Menge U mit $A \subset U \subset \overline{U} \subset O$ existiert.*

Beweis. Sei X ein T_4-Raum und $A \subset O \subset X$, A abgeschlossen, O offen. Da $X \setminus O$ abgeschlossen und disjunkt zu A ist, existieren offene $U, V \subset X$ mit $A \subset U$, $X \setminus O \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$. Es ist dann $\overline{U} \subset X \setminus V \subset O$.

Hat andererseits X die Eigenschaft aus der Proposition und sind $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen, so existiert eine offene Menge U mit $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus B$. Für die offene Menge $V := X \setminus \overline{U}$ gilt dann $U \cap V = \emptyset$ und $B \subset V$. Damit ist X ein T_4-Raum. □

11.2. Satz (Urysohnsches Lemma). *Sei X ein T_4-Raum und $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann existiert eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f[A] \subset \{0\}$, $f[B] \subset \{1\}$*

Beweis. Sei $D_n := \left\{\frac{m}{2^n} \colon 0 \leq m \leq 2^n\right\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Wir zeigen zunächst, dass es offene Mengen U_d, $d \in D$ mit $A \subset U_0$, $U_1 = X \setminus B$ und $\overline{U}_d \subset U_e$ für alle $d, e \in D$ mit $d < e$. Setze dazu $U_1 := X \setminus B$ und wähle mit Hilfe der vohergehenden Proposition U_0, so dass $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset X \setminus B$. Ist nun $n \in \mathbb{N}$ und U_d für alle $d \in D_n$ definiert, so setzen wir die Definition für alle $d \in D_{n+1}$ wie folgt fort. Für alle $d = \frac{m}{2^{n+1}}$ mit geraden m ist U_d bereits definiert. Ist nun m ungerade, so ist $\overline{U}_{\frac{m-1}{2^{n+1}}} \subset U_{\frac{m+1}{2^{n+1}}}$ und wir können $U_{\frac{m}{2^{n+1}}}$ so wählen, dass $\overline{U}_{\frac{m-1}{2^{n+1}}} \subset U_{\frac{m}{2^{n+1}}} \subset \overline{U}_{\frac{m}{2^{n+1}}} \subset U_{\frac{m+1}{2^{n+1}}}$.

Für diese U_d definieren wir nun

$$
\begin{aligned}
f\colon X &\to [0,1] \\
x &\mapsto \begin{cases} \inf\{d \in D\colon x \in U_d\}, & x \in U_1 \\ 1, & x \notin U_1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Es ist offenbar $f[A] \subset \{0\}$ und $f[B] \subset \{1\}$. Seien nun $r, s \in [0,1]$. Es sind $f^{-1}[[0,r)] = \bigcup_{d<r} U_d$ und $f^{-1}[(s,1]] = \bigcup_{d>s}(X \setminus U_d) = \bigcup_{d>s}(X \setminus \overline{U}_d)$ offen, dabei gilt die letzte Gleichheit, da zu jedem $d \in D$ mit $d > s \geq 0$ ein $d' \in D$ mit $d > d' > s$ existiert. Da $\{[0,r)\colon r \in [0,1]\} \cup \{(s,1]\colon s \in [0,1]\}$ eine Subbasis der Topologie von $[0,1]$ ist, zeigt das die Stetigkeit von f. $\square$

11.3. Bemerkung. Das charakterisiert die T_4-Räume, denn ist $f\colon X \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit $f[A] \subset \{0\}$ und $f[B] \subset \{1\}$, so sind $f^{-1}\big[[0,\frac{1}{2})\big]$ und $f^{-1}\big[(\frac{1}{2},1]\big]$ offene Mengen, die A und B trennen.

Bevor wir fortfahren, müssen wir uns vergewissern, dass ein Konzept, das wir aus der Analysis I für den Raum $\mathbb{R}$ kennen, auch allgemeiner sinnvoll ist.

11.4. Definition. Sei M eine Menge und (Y,d) ein metrischer Raum. Wir sagen, eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon M \to Y$ *konvergiert gleichmäßig* gegen eine Funktion $g\colon M \to Y$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|g(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ und $m \geq n$.

11.5. Proposition. *Sei X ein topologischer Raum, (Y,d) ein metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $g\colon X \to Y$ konvergiert. Dann ist g stetig.*

Beweis. Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in X$ und eine Umgebung U von x, so dass $f[U] \subset B_{\varepsilon/3}(f(x))$. Damit ist

$$
\begin{aligned}
|g(x') - g(x)| &\leq |g(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

für alle $x' \in U$, und g ist in x stetig. $\square$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass sich in T_4-Räumen auf abgeschlossenen Teilmengen definierte stetige reellwertige Funktionen auf den ganzen Raum fortsetzen lassen. Wir beginnen mit einem Teilergebnis.

11.6. Lemma. *Ist X ein T_4-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen, $b \in \mathbb{R}$ und $f\colon A \to [0,b]$ stetig, so existiert eine stetige Funktion $g\colon X \to [0,\frac{1}{3}b]$ mit $0 \le f(x) - g(x) \le \frac{2}{3}b$ für alle $x \in A$.*

Beweis. Setze $B_0 := f^{-1}\big[[0,\frac{1}{3}b]\big]$ und $B_1 := f^{-1}\big[[\frac{2}{3}b,b]\big]$. Nach dem Urysohnschen Lemma existiert dann eine stetige Funktion $h\colon X \to [0,1]$ mit $h[B_0] \subset \{0\}$, $h[B_1] \subset \{1\}$. Mit $g(x) := \frac{1}{3}b \cdot h(x)$ erhält man eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. □

11.7. Satz (Tietze). *Ist X ein T_4-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $f\colon A \to [0,1]$ stetig, so existiert eine stetige Funktion $F\colon X \to [0,1]$ mit $F|_A = f$.*

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $f_0 := f$. Nun verschaffen wir uns rekursiv für $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen $f_n\colon A \to \big[0,\big(\frac{2}{3}\big)^n\big]$ und $g_n\colon X \to \big[0,\frac{1}{3}\cdot\big(\frac{2}{3}\big)^n\big]$ mit $f_{n+1}(x) = f_n(x) - g_n(x)$ für alle $x \in A$. Den Rekursionsschritt liefert dabei Lemma 11.6.

Da $\sum_{n=0}^{\infty}\big(\frac{1}{3}\cdot\big(\frac{2}{3}\big)^n\big) = 1$, ist die Reihe $\sum g_n$ gleichmäßig konvergent und definiert eine stetige Funktion $F\colon X \to [0,1]$ durch $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$. Für $x \in A$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} &f(x) - \sum_{k=0}^{n} g_n(x) \\ &\quad = f_0(x) - (f_0(x) - f_1(x)) - (f_1(x) - f_2(x)) - \cdots - (f_n(x) - f_{n+1}(x)) \\ &\qquad = f_{n+1}(x), \end{aligned}$$

und da $f_n\colon A \to \big[0,\big(\frac{2}{3}\big)^n\big]$ und $\big(\frac{2}{3}\big)^n \to 0$ folgt $F|_A = f$. □

Vollständig reguläre Räume

Wir fügen der Liste der Trennungseigenschaften noch eine weitere hinzu.

11.8. Definition. Sei X ein Raum. Wir sagen, X sei ein *T_{3a}-Raum*, wenn er die folgende Eigenschaft erfüllt.

(T_{3a}) Zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ mit $x \notin A$ existiert eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $f[A] \subset \{1\}$.

Ein Raum heißt *vollständig regulär*, wenn er T_{3a} und T_1 erfüllt.

11.9. Proposition. *T_{3a}-Räume erfüllen T_3.* □

11.10. Proposition. *Normale Räume sind vollständig regulär.*

Beweis. Gegeben eine abgeschlossene Menge A und ein $x \notin A$ wende man das Urysohnschen Lemma auf $\{x\}$ und A an. □

Die folgende Propositition zeigt die Bedeutung der Existenz reellwertiger stetiger Funktionen, wie sie für T_{3a}-Räume gegeben ist.

11.11. Lemma. *Sind X ein Raum, J eine Menge und $f_j : X \to [0,1]$ stetige Funktionen, so dass für jeden Punkt $x \in X$ und jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ mit $x \notin A$ ein $j \in J$ mit $f_j(x) = 0$ und $f_j[A] \subset \{1\}$ existiert, so trägt X die Initialtopologie bezüglich der f_j.*

Beweis. Da die f_j als stetig vorausgesetzt sind, reicht es nach der Konstruktion der Initialtopologie aus Proposition 5.11, noch zu zeigen, dass für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x ein $j \in J$ und eine offene Menge $V \subset [0,1]$ mit $x \in f^{-1}[V] \subset U$ existieren. Nach Voraussetzung existiert aber ein $j \in J$, so dass $f_j(x) = 0$ und $f_j[X \backslash U] \subset \{1\}$, also $x \in f^{-1}[[0,1)] \subset U$. $\square$

Die Eigenschaft, Initialtopologie bezüglich einer Menge von Funktionen zu sein, wollen wir umformulieren.

11.12. Proposition. *Sei X ein Raum, Y_j für $j \in J$ Räume und $f_j : X \to Y_j$ Funktionen. Dann trägt der Raum X genau dann die Initialtopologie bezüglich der Funktionen f_j, $j \in J$, wenn er die Initialtopologie bezüglich der Funktion $(f_j)_{j\in J} : X \to \prod_{j\in J} Y_j$ trägt.*

Beweis. Aus der universellen Eigenschaft der Produkttopologie folgt:

- ▷ $(f_j)_{j\in J}$ ist genau dann stetig, wenn f_j für alle $j \in J$ stetig ist.
- ▷ Ist Z ein Raum und $g : Z \to X$ eine Funktion, so ist $(f_j)_{j\in J} \circ g$ genau dann stetig, wenn $f_j \circ g$ für alle $j \in J$ stetig ist.

Die Behauptung folgt damit unmittelbar aus der universellen Eigenschaft der Initialtopologie in Definition 5.2. $\square$

11.13. Proposition. *Ist X ein vollständig regulärer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so existiert eine abzählbare Menge C und eine Einbettung $h : X \to [0,1]^C$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass X eine abzählbare Menge von Funktionen besitzt, die die Bedingungen aus Lemma 11.11 erfüllt. Sei dazu $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X. Zu jedem Paar $(U,V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ wählen wir, wenn eine solche existiert, eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f[U] \subset \{0\}$ und $f[X \setminus V] \subset \{1\}$. Dies liefert uns eine abzählbare Menge C von Funktionen.

Ist nun $x \in X$ und $A \subset X$ abgeschlossen mit $x \notin A$, so existiert ein $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V \subset X \setminus A$ und, da X ein T_{3a}-Raum ist, eine stetige Funktion $g : X \to [0,1]$ mit $g(x) = 0$ und $g[X \setminus V] \subset 1$. Betrachten wir nun die stetige Funktion

$$\begin{aligned} t\colon [0,1] &\to [0,1] \\ s &\mapsto \begin{cases} 0, & s \le \frac{1}{2} \\ 2s-1, & s \ge \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

und setzen wir $g' := t \circ g$, so ist $(g')^{-1}[\{0\}] \supset g^{-1}[[0, \frac{1}{2})]$ eine Umgebung von x, also existiert ein $U \in \mathcal{B}$ mit $x \in U$ und $g'[U] \subset \{0\}$. Da überhaupt eine Funktion, nämlich g', mit diesen Eigenschaften existiert, existiert auch ein $f \in C$ mit $f(x) \in f[U] = \{0\}$ und $f[A] \subset f[X \setminus V] \subset \{1\}$.

Da also C die Voraussetzungen von Lemma 11.11 erfüllt, trägt X die Initialtaltopologie bezüglich der $f \in C$. Mit Proposition 11.12 umformuliert trägt X die Initialtopologie bezüglich der Abbildung

$$\begin{aligned} h\colon X \to& [0,1]^C \\ x \mapsto& h(x) \\ & h(x)_f := f(x). \end{aligned}$$

Es ist nur noch zu zeigen, dass h injektiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn C Punkte trennt, wenn es also zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ immer ein $f \in C$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt. Da aber X ein T_1-Raum ist, ist in dieser Situation $\{y\}$ abgeschlossen und die Argumentation des letzten Absatzes angewandt auf x und $\{y\}$ liefert ein $f \in C$ mit $f(x) = 0 \neq 1 = f(y)$. □

11.14. Proposition. *Abzählbare Produkte metrisierbarer Räume sind metrisierbar.*

Beweis. Als Aufgabe 31. □

11.15. Satz. *Ist X ein vollständig regulärer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so ist X metrisierbar.*

Beweis. Nach Proposition 11.13 und Proposition 11.14 ist X homöomorph zu einem Unterraum eines metrisierbaren Raumes. □

Dies ist ein recht schwacher Metrisiationssatz, doch wir wollen uns mit ihm begnügen. Mehr zu diesem Thema findet man in [Que73, Kap. 10]. Dort erfährt man zum Beispiel, dass Regularität an Stelle von vollständiger Regularität ausgereicht hätte.