Lieferung 12

Kompaktifizierungen

Kompaktifizierungen

12.1. Definition. Sei X ein Raum. Eine *Kompaktifizierung* von X ist ein kompakter Raum K zusammen mit einer Einbettung $e\colon X \to K$, so dass $e[X]$ dicht in K ist.

12.2. Bemerkung. Um eine Kompaktifizierung zu besitzen, muss X natürlich hausdorffsch sein. Mehr noch: Da kompakte Räume vollständig regulär sind und sich vollständige Regularität auf Unterräume vererbt (das zeigt man wie für Regularität), muss X vollständig regulär sein. Wir werden bald sehen, dass vollständig reguläre Räume tatsächlich immer eine Kompaktifizierung besitzen.

12.3. Beispiele.

- ▹ In Aufgabe 2 haben wir gesehen, dass die stereographische Projektion eine Einbettung $s\colon \mathbb{R}^n \to S^n$ liefert, so dass $S^n \setminus s[\mathbb{R}^n]$ aus einem einzigen Punkt besteht. Da für $n > 0$ kein Punkt von S^n isoliert ist, ist in diesem Fall $s\colon \mathbb{R}^n \to S^n$ eine Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$. (Zum Fall $n = 0$ beachte, dass $\mathbb{R}^0$ selbst kompakt ist.)

  Genau dann konvergiert für eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ die Folge $(s(a_n))$ gegen diesen zusätzlichen Punkt, wenn die ursprüngliche Folge bestimmt gegen unendlich konvergiert. Man kann sich diese Kompaktifizierung also so vorstellen, dass ein unendlich ferner Punkt zu $\mathbb{R}^n$ hinzugefügt wurde.

- ▹ Die Abbildung

  $$\begin{aligned} t\colon \mathbb{R}^n &\to D^n \\ x &\mapsto \frac{\|x\|}{1+\|x\|^2} \cdot x \end{aligned}$$

  bildet $\mathbb{R}^n$ homöomorph auf das Innere der Scheibe ab und ist daher auch eine Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$. Für den Fall $n = 1$ entspricht das dem Hinzufügen eines Punktes $+\infty$ und eines Punktes $-\infty$ zu $\mathbb{R}$.

▷ Die Inklusion $\mathbb{Q} \cap I \to I$ ist eine Kompaktifizierung von $\mathbb{Q} \cap I$. Im Gegensatz zu den vorhergehenden Beispielen ist hier $\mathbb{Q} \cap I$ nicht offen in I. Dies liegt daran, dass $\mathbb{Q}$ nicht die Eigenschaft der lokalen Kompaktheit besitzt, eine Eigenschaft, die wir bald definieren werden.

12.4. Definition. Sei X ein Raum. Zwei Kompaktifizierungen $e_1\colon X \to K_1$ und $e_2\colon X \to K_2$ heißen äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $h\colon K_1 \to K_2$ gibt, so dass

$$\begin{tikzcd} & K_1 \arrow[d, "h", "\approx"'] \\ X \arrow[ur, "e_1"] \arrow[dr, "e_2"'] & \\ & K_2 \end{tikzcd}$$

kommutiert.

12.5. Lemma. *Seien X ein Raum und $e_1\colon X \to K_1$ und $e_2\colon X \to K_2$ Kompaktifizierungen. Existieren stetige Abbbildungen f und g, so dass die beiden Diagramme*

$$\begin{tikzcd} & K_1 \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[ur, "e_1"] \arrow[dr, "e_2"'] & \\ & K_2 \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} & K_2 \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[ur, "e_2"] \arrow[dr, "e_1"'] & \\ & K_1 \end{tikzcd}$$

kommutieren, so sind e_1 und e_2 äquivalente Kompaktifizierungen.

Beweis. Durch Zusammensetzen der beiden Diagramme erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & K_1 \arrow[d, "g\circ f", "\approx"'] \\ X \arrow[ur, "e_1"] \arrow[dr, "e_1"'] & \\ & K_1, \end{tikzcd}$$

die stetige Abbildung $g \circ f$ stimmt also auf der dichten Menge $e_1[X]$ mit der stetigen Abbildung id_{K_1} überein. Da K_1 hausdorffsch ist, folgt daraus, dass $g \circ f = \mathrm{id}_{K_1}$. Das haben wir bereits in Aufgabe 11 gezeigt, tun es aber hier in der Hoffnung, dass es instruktiv ist, noch einmal: Sei $y \in K_1$. Da $y \in \overline{e_1[X]}$, existiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf X, so dass $(e_1)_*(\mathcal{F}) \to y$. Da $g \circ f$ stetig ist, konvergiert $(g \circ f \circ e_1)_*(\mathcal{F}) = (g \circ f)_*((e_1)_*(\mathcal{F}))$ gegen $(g \circ f)(y)$ (für die Gleichheit siehe Aufgabe 26). Andererseits ist $(g \circ f \circ e_1)_*(\mathcal{F}) = (e_1)_*(\mathcal{F})$, konvergiert also gegen y. Da in dem Hausdorff-Raum K_1 Grenzwerte eindeutig sind, folgt $(g \circ f)(y) = y$.

Ebenso ist $f \circ g = \mathrm{id}_{K_2}$. Damit ist f ein Homöomorphismus. □

Lokale Kompaktheit und die Ein-Punkt-Kompaktifizierung

12.6. Definition. Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann setzen wir $X^+ := X \cup \{\infty\}$, wobei ∞ irgendein Punkt sei, der nicht in X ist, und versehen X^+ mit der Topologie

$$\mathcal{T} := \{O \subset X : O \text{ offen in } X\} \cup \big\{X^+ \setminus K : K \subset X \text{ kompakt}\big\}.$$

12.7. Proposition. *Die Menge $\mathcal{T}$ aus der Definition ist tatsächlich eine Topologie auf X^+, und die Inklusion $X \to X^+$ ist eine Einbettung und X offen in X^+.*

Beweis. Wir bezeichnen die erste Menge aus der Definition von $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T}_X$, die zweite mit $\mathcal{T}_\infty$, also $\mathcal{T}_X = \{O \in \mathcal{T} : \infty \notin O\}$, $\mathcal{T}_\infty = \{O \in \mathcal{T} : \infty \in \mathcal{T}\}$.

Dass X offen in X^+ ist, ist klar. Dass die Inklusion eine Einbettung ist, heißt gerade, dass die Topologie, die X als Unterraum von X^+ erhält, die ursprüngliche ist. Da $\mathcal{T}_X$ gerade diese ursprüngliche Topologie von X ist, bleibt nur zu zeigen, dass $O \cap X \in \mathcal{T}_X$ für alle $O \in \mathcal{T}_\infty$. Das gilt aber, da kompakte Teilmengen eines Hausdorff-Raumes abgeschlossen sind.

Sei nun $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$. Ist $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}_X$, so ist, da ja $\mathcal{T}_X$ eine Topologie auf X ist, $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}$. Ist $\mathcal{O} \not\subset \mathcal{T}_X$, so existiert eine kompakte Teilmenge K von X mit $X^+ \setminus K \in \mathcal{O}$, und $\bigcup \mathcal{O} = X^+ \setminus (K \setminus \bigcup \mathcal{O})$. Da aber $X \cap \bigcup \mathcal{O}$ offen in X ist, ist $K \setminus \bigcup \mathcal{O}$ kompakt, also $X^+ \setminus (K \setminus \bigcup \mathcal{O}) \in \mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $O_i \in \mathcal{T}$ für $1 \leq i \leq n$. Ist $O_i \in \mathcal{T}_\infty$ für alle i, so ist $X^+ \setminus O_i$ für alle i eine kompakte Teilmenge von X, also auch $\bigcup_{i=1}^n (X^+ \setminus O_i)$ und $\bigcap_{i=1}^n O_i = X^+ \setminus \bigcup_{i=1}^n (X^+ \setminus O_i) \in \mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}$. Existiert ein i mit $O_i \notin \mathcal{T}_\infty$, so ist $\bigcap_i O_i \subset X$, also, da wir schon gesehen haben, dass $O \cap X \in \mathcal{T}_X$ für alle $O \in \mathcal{T}$, $\bigcap_{i=1}^n O_i = \bigcap_{i=1}^n (O_i \cap X) \in \mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}$. □

12.8. Proposition. *Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann ist X^+ quasikompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von X^+. Dann existiert ein $O \in \mathcal{C}$ mit $\infty \in O$. Da $X^+ \setminus O$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge von $\mathcal{C}$, die $X^+ \setminus O$ überdeckt. Zusammen mit O ergibt dies eine endliche Teilmenge von $\mathcal{C}$, die X^+ überdeckt. □

12.9. Proposition. *Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann ist genau dann X dicht in X^+, wenn X nicht kompakt ist.*

Beweis. Genau dann ist X nicht dicht in X^+, wenn $\{\infty\}$ offen ist, wenn also $X^+ \setminus \{\infty\} = X$ kompakt ist. □

12.10. Proposition. *Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann ist genau dann X^+ hausdorffsch, wenn jeder Punkt $x \in X$ in X eine kompakte Umgebung besitzt.*

Beweis. Da X hausdorffsch ist, ist X^+ genau dann hausdorffsch, wenn zu jedem $x \in X$ offene Mengen $U, V \subset X^+$ mit $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ und $\infty \in V$ existieren, wenn also zu jedem $x \in X$ eine offene Menge $V \subset X^+$ mit $\infty \in V$ existiert, so dass $X^+ \setminus V$ eine Umgebung von x ist. Betrachtet man das Komplement von V, so ergibt sich die Behauptung. □

12.11. Definition. Sei X ein Raum. X heißt *lokal kompakt*, wenn X hausdorffsch ist und jeder Punkt von x eine kompakte Umgebung besitzt.

Wir fassen zusammen:

12.12. Definition und Proposition. *Ist X ein lokal kompakter, nicht kompakter Raum, so ist X^+ (zusammen mit der Inklusion $X \to X^+$) eine Kompaktifizierung von X. Diese nennen wir die* Ein-Punkt-Kompaktifizierung *von X.* □

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung

Konstruktion

12.13. Notation. Für beliebige Räume Y, Z setzen wir

$$C(Y, Z) := \{f : Y \to Z : f \text{ stetig}\}.$$

12.14. Definition. Sei X ein vollständig regulärer Raum. Wir setzen mit $I = [0, 1]$

$$\begin{aligned} \Phi : X &\to I^{C(X,I)} \\ x &\mapsto (\mu(x))_{\mu \in C(X,I)}, \end{aligned}$$

das heißt, wir haben $\Phi(x)(\mu) = \mu(x)$, und

$$\beta X := \overline{\Phi[X]}.$$

Wir nennen $\Phi : X \to \beta X$ die *Stone-Čech-Kompaktifizierung* von X, was wir sogleich rechtfertigen werden.

12.15. Proposition. *Sei X ein vollständig regulärer Raum. $\Phi : X \to \beta X$ ist eine Kompaktifizierung von X.*

Beweis. Da X ein T_{3a}-Raum ist, trägt X nach Lemma 11.11 und Proposition 11.12 die Initialtopologie bezüglich der Abbildung Φ. Da X zusätzlich ein T_1-Raum ist, trennt $C(X, I)$ Punkte, und Φ ist injektiv, also eine Einbettung. $\Phi[X]$ ist nach Definition dicht in βX. Da I kompakt ist, ist nach dem Satz von Tychonoff auch $I^{C(X,I)}$ kompakt, also auch die abgeschlossene Teilmenge βX. □

Funktorialität

12.16. Definition und Proposition. Sind X, Y, Z Räume und $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion, so induziert f eine Funktion

$$\begin{aligned} f^*\colon C(Y,Z) &\to C(X,Z) \\ g &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

12.17. Definition und Proposition. *Sind X ein Raum und J_1, J_2 Mengen, so induziert eine Funktion $t\colon J_1 \to J_2$ eine stetige Abbildung*

$$\begin{aligned} t^*\colon X^{J_2} &\to X^{J_1} \\ x &\mapsto x \circ t. \end{aligned}$$

Beweis. Es bezeichne für $i \in \{1,2\}$, $j \in J_i$, p^i_j die Projektion

$$\begin{aligned} p^i_j\colon X^{J_i} &\to X \\ x &\mapsto x(j). \end{aligned}$$

Für beliebiges $j \in J_1$ und $x \in X^{J_2}$ ist dann $p^1_j(t^*(x)) = (x \circ t)(j) = x(t(j)) = p^2_{t(j)}(x)$, also $p^1_j \circ t^* = p^2_{t(j)}$. Damit ist für alle $j \in J_1$ die Abbildung $p^1_j \circ t^*$ stetig. Es folgt, dass t^* stetig ist. □

12.18. Proposition. *Seien X, Y vollständig reguläre Räume, $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann ist $f^{**}\colon I^{C(X,I)} \to I^{C(Y,I)}$ eine stetige Abbildung und $f^{**} \circ \Phi^X = \Phi^Y \circ f$. Insbesondere ist $f^{**}\left[\overline{\Phi[X]}\right] \subset \overline{\Phi[Y]}$.*

Beweis. Wir rechnen $f^{**} \circ \Phi^X = \Phi^Y \circ f$ nach: Für $x \in X$ und $\mu \in C(Y,I)$ ist

$$\begin{aligned} (f^{**} \circ \Phi^X)(x)(\mu) = (\Phi^X(x) \circ f^*)(\mu) = \Phi^X(x)(\mu \circ f) = \\ = (\mu \circ f)(x) = \mu(f(x)) = \Phi^Y(f(x))(\mu). \end{aligned}$$

□

Dies ermöglicht die folgende Definition.

12.19. Definition. Seien X, Y vollständig reguläre Räume, $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \beta f\colon \beta X &\to \beta Y \\ x &\mapsto f^{**}(x). \end{aligned}$$

Ebenfalls gezeigt haben wir:

12.20. Proposition. *Seien X, Y vollständig reguläre Räume, $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann ist βf stetig und das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi^X"] \arrow[d, "f"] & \beta X \arrow[d, "\beta f"] \\ Y \arrow[r, "\Phi^Y"] & \beta Y \end{tikzcd}$$

kommutiert. □

Universelle Eigenschaft

12.21. Proposition. *Sei X vollständig regulär, K kompakt und $f\colon X \to K$ stetig. Dann existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf βX, also eine stetige Funktion $\tilde{f}$, so dass*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, dotted, "!" ', "\tilde{f}"] \\ & K \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass $\Phi[X]$ dicht in βX ist. Zur Existenz betrachte

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi^X"] \arrow[d, "f"] & \beta X \arrow[d, "\beta f"] \\ K \arrow[r, "\Phi^K"] & \beta K \end{tikzcd}$$

und bemerke, dass, da K kompakt und $\Phi^K[K]$ dicht in βK ist, $\Phi^K[K] = \beta K$ also Φ^K ein Homöomorphismus ist. Setze nun $\tilde{f} := (\Phi^K)^{-1} \circ \beta f$. □

Insbesondere gilt das, wenn f eine Kompaktifizierung ist. Dies charakterisiert die Stone-Čech-Kompaktifizierung.

12.22. Proposition. *Sei X ein vollständig regulärer Raum, $e\colon X \to K$ eine Kompaktifizierung. Genau dann ist $e\colon X \to K$ äquivalent zur Stone-Čech-Kompaktifizierung, wenn für jede Kompaktifizierung $e'\colon X \to K'$ eine stetige Abbildung $g\colon K \to K'$ existiert, so dass*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & K \arrow[d, dotted, "g"] \\ & K' \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Das folgt sofort aus Proposition 12.21 und Lemma 12.5. □

Bemerkungen

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung ist für den geometrisch Interessierten weniger wichtig als für Mengentheoretiker und gewisse Analytiker. Sie ist im allgemeinen sehr gross und kompliziert. Zum Beispiel ist $|\beta\mathbb{N}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$, und es gibt topologische Eigenschaften von $\beta\mathbb{N}$, die unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre sind.

Andererseits muss die Stone-Čech-Kompaktifizierung nicht gross sein: Für $[0, \omega_1)$ stimmen die Stone-Čech-Kompaktifizierung und die Ein-Punkt-Kompaktifizierung (bis auf Äquivalenz) überein und sind äquivalent zur Inklusion $[0, \omega_1) \to [0, \omega_1]$. Das liegt im Wesentlichen daran, dass man jede stetige Funktion von $[0, \omega_1)$ in die rellen Zahlen auf $[0, \omega_1]$ fortsetzen kann, was man elementar, aber vielleicht etwas trickreich, zeigen kann. Mit Proposition 12.22 folgt also, dass $[0, \omega_1)$ bis auf Äquivalenz genau eine Kompaktifizierung besitzt.