Lieferung 13

Homotopie

Wir betrachten nun das Deformieren einer Abbildung in eine andere und erhalten dabei auch eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume, die viel schwächer als Homöomorphie ist.

Homotopie

13.1. Definition. Seien X, Y topologische Räume und $f_0, f_1 \colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1 ist eine stetige Abbildung $F \colon X \times I \to Y$, so dass $F(x, 0) = f_0(x)$ und $F(x, 1) = f_1(x)$ für alle $x \in X$. Wir nennen f_0 und f_1 zu einander *homotop* und schreiben $f_0 \simeq f_1$, wenn eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 existiert.

Für die Anschauung mag es manchmal sinnvoll sein, sich F als Abbildung vom Zylinder $X \times I$ vorzustellen, und manchmal, F als eine mit der Zeit $t \in I$ variierende Schar von Funktionen

$$\begin{aligned} f_t \colon X &\to Y \\ x &\mapsto F(x, t) \end{aligned}$$

anzusehen.

13.2. Proposition. *Seien X, Y Räume. Die Relation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Funktionen von X nach Y.*

Beweis. Es seien $f, g, h \colon X \to Y$ stetig.

Die stetige Funktion

$$\begin{aligned} X \times I &\to Y \\ (x, t) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

zeigt $f \simeq f$ und damit die Reflexivität von $\simeq$.

Ist $f \simeq g$ und F eine Homotopie zwischen f und g, so ist mit

$$\begin{aligned} r \colon I &\to I \\ t &\mapsto 1 - t \end{aligned}$$

$F \circ (\mathrm{id}_X \times r)$ eine Homotopie zwischen g und f, also $g \simeq f$, was die Symmetrie von $\simeq$ zeigt.

Ist $f \simeq g$ und $g \simeq h$ und mit zugehörigen Homotopien F und G, so ist

$$\begin{aligned} X \times I &\to Y \\ (x,t) &\mapsto \begin{cases} F(x,2t), & t \le \frac{1}{2}, \\ G(x,2t-1), & t \ge \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen f und h. Für die wohldefiniert beachte, dass $F(x,1) = g(x) = G(x,0)$ und für die Stetigkeit, dass $X \times [0,\frac{1}{2}]$ und $X \times [\frac{1}{2},1]$ in $X \times I$ abgeschlossen sind. Dies zeigt $f \simeq h$ und die Transitivität von $\simeq$. □

Die Komposition von Abbildungen respektiert die Äquivalenzrelation Homotopie:

13.3. Proposition. *Seien X, Y, Z Räume und $f, f'\colon X \to Y$, $g, g'\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen. Ist $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$, so ist $g \circ f \simeq g' \circ f'$.*

Beweis. Ist F eine Homotopie zwischen f und f', G eine Homotopie zwischen g und g', so ist $G \circ F$ eine Homotopie zwischen $g \circ f$ und $g' \circ f'$. □ Unsinn!

Homotopieäquivalenz

13.4. Definition. Seien X, Y Räume. Eine *Homotopieäquivalenz* zwischen X und Y ist eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$, so dass eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ mit

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$

existiert. In dieser Situation nennen wir g *homotopieinvers* zu f. Wir sagen, X und Y seien *homotopieäquivalent*, und schreiben $X \simeq Y$, wenn zwischen ihnen eine Homotopieäquivalenz existiert.

13.5. Proposition. *Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Seien X, Y, Z Räume. $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ zeigt $X \simeq X$ und damit die Reflexivität. Symmetrie ergibt sich sofort aus der Definition. Seien nun $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Homotopieäquivalenzen mit Homotopieinversen f' und g'. Dann ist

$$(f' \circ g') \circ (g \circ f) = f' \circ (g' \circ g) \circ f \simeq f' \circ \mathrm{id}_Y \circ f = f' \circ f \simeq \mathrm{id}_X$$

und ebenso

$$(g \circ f) \circ (f' \circ g') \simeq \mathrm{id}_Z,$$

also $g \circ f\colon X \to Z$ eine Homotopieäquivalenz. Das zeigt die Transitivität. □

13.6. Beispiel. Wir zeigen für $n \in \mathbb{N}$, dass $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \simeq S^n$. In der Tat sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} i\colon S^n &\to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, & \qquad r\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\to S^n \\ x &\mapsto x & x &\mapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

homotopieinvers zueinander: Es ist $r \circ i = \mathrm{id}_{S^n}$, also insbesondere $r \circ i \simeq \mathrm{id}_{S^n}$. Betrachtet man nun

$$\begin{aligned} H\colon (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times I &\to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (x,t) &\mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|}\right) x, \end{aligned}$$

so ist $H(x,0) = \frac{x}{\|x\|}$, $H(x,1) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, also $i \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$.

13.7. Bemerkung. Zu zeigen, dass zwei Räume *nicht* homotopieäquivalent sind, ist keinesfalls einfach. Zum Beispiel legt die Anschauung nahe, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ gilt, dass $S^n \not\simeq S^m$. Während das wahr ist, ist es nur für $n = 0$ mit elementaren Mitteln beweisbar. Den Fall $n = 1$ werden wir immerhin mit Hilfe der Fundamentalgruppe, auf deren Theorie wir den Rest der Vorlesung verwenden werden, lösen können. Der allgemeine Fall entzieht sich den Mitteln, die wir in dieser Vorlesung zur Verfügung haben. In der algebraischen Topologie ist das jedoch eines der ersten Ergebnisse.

13.8. Definition. Ein Raum heißt *zusammenziehbar*, wenn er homotopieäquivalent zu dem einpunktigen Raum ist.

Eine einfache Umformulierung ist:

13.9. Proposition. *Sei X ein Raum. Dann ist X genau dann zusammenziehbar, wenn id_X homotop zu einer konstanten Abbildung ist.* □

13.10. Proposition. *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist X zusammenziehbar.*

Beweis. Sei X sternförmig bezüglich $p \in X$. Dann ist

$$\begin{aligned} H\colon X \times I &\to X \\ (x,\lambda) &\mapsto \lambda p + (1-\lambda)x \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen id_X und der Abbildung, die konstant p ist. □

13.11. Korollar. *Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so ist X zusammenziehbar.* □

Homotopie relativ zu einem Unterraum

13.12. Definition. Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Wir sagen, f sei *relativ zu A homotop* zu g, $f \simeq g \text{ rel } A$, wenn eine Homotopie $F\colon X \times I \to Y$ zwischen f und g existiert, so dass $F(a,t) = F(a,0)$ für alle $a \in A$, $t \in I$.

Damit $f \simeq g \text{ rel } A$ gelten kann, muss natürlich $f|_A = g|_A$ erfüllt sein.

13.13. Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$. Dann ist Homotopie relativ zu A eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Man wiederhole den Beweis, den wir oben für $A = \emptyset$ gegeben haben. □

Ebenso verallgemeinern wir:

13.14. Proposition. *Seien X, Y, Z Räume, $A \subset X$ und $f, f'\colon X \to Y$, $g, g'\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen. Ist $f \simeq f' \text{ rel } A$ und $g \simeq g' \text{ rel } f[A]$, so ist $g \circ f \simeq g' \circ f' \text{ rel } A$.* □

Nützlich ist auch die folgende Tatsache.

13.15. Proposition. *Seien X ein Raum, $A \subset X$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f, g\colon X \to Y$. Ist $f|_A = g|_A$ und Y konvex, so ist $f \simeq g \text{ rel } A$.*

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned} H\colon X \times I &\to Y \\ (x, \lambda) &\mapsto (1-\lambda) f(x) + \lambda g(x). \end{aligned}$$

Es ist $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Außerdem ist $H(a,\lambda) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$, $\lambda \in I$. □

13.16. Beispiel. Ist X ein Raum und sind $w, w'\colon I \to X$ stetige Wege mit gleichem Anfangspunkt, also $w(0) = w'(0)$, so ist $w \simeq w' \text{ rel } \{0\}$: Ist $c_0\colon I \to I$ die Abbildung, die konstant 0 ist, so ist nämlich, da I konvex ist, $c_0 \simeq \mathrm{id}_I \text{ rel } \{0\}$ und daher

$$\begin{aligned} w &= w \circ \mathrm{id}_I \\ &\simeq w \circ c_0 \text{ rel } \{0\} \\ &= w' \circ c_0 \\ &\simeq w' \circ \mathrm{id}_I \text{ rel } \{0\} \\ &= w'. \end{aligned}$$

Andererseits scheint auch offensichtlich, dass für

$$\begin{aligned} w\colon I &\to S^1, & w'\colon I &\to S^1 \\ s &\mapsto (\cos s\pi, \sin s\pi) & s &\mapsto (\cos s\pi, -\sin s\pi), \end{aligned}$$

also zwei Wege in von $(1,0)$ nach $(-1,0)$ in S^1, wobei einer oben, der andere unten entlang geht, gilt, dass

$$w \not\simeq w' \text{ rel } \{0,1\},$$

dass es also nicht möglich ist, den einen Weg in den anderen zu überführen, wenn man beide Endpunkte festhält. Das ist auch in der Tat wahr, wir werden aber noch einiges an Vorbereitung benötigen, um das zu zeigen.