Lieferung 15

Überlagerungen und die Fundamentalgruppe von S^1

Dass Überlagerungen (die Definition folgt weiter unten) in engem Zusammenhang mit der Fundamentalgruppe stehen, werden wir noch sehen.[1] Zunächst wollen wir uns von einem konkreten Beispiel leiten lassen, die Beweise aber gleich in ausreichender Allgemeinheit führen.

Wenn wir die Theorie der Fundamentalgruppe gewinnbringend anwenden wollen, müssen wir wohl endlich die Fundamentalgruppe eines Raumes bestimmen, für den sie nicht trivial ist. Der grundlegende Fall ist die Kreislinie. Wir betrachten für $k \in \mathbb{Z}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} u_k \colon I &\to S^1 \\ s &\mapsto (\cos 2\pi k t, \sin 2\pi k t). \end{aligned}$$

Das ist eine Schleife bei $(1,0)$. Anschaulich wickelt diese das Einheitsintervall k-mal um die Kreislinie herum. Wir werden im folgenden zeigen, dass $u_k \simeq u_l \text{ rel } \{0,1\}$ nur für $k = l$ und dass zu jeder Schleife w in S^1 bei $(1,0)$ ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $w \simeq u_k \text{ rel } \{0,1\}$. Wir werden also zeigen, dass

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathbb{Z} &\to \pi_1(S^1, (1,0)) \\ k &\mapsto [u_k] \end{aligned}$$

eine Bijektion (und in der Tat ein Isomorphismus von Gruppen) ist. Dabei wird es sich als hilfreich erweisen, die Abbildung

$$\begin{aligned} p \colon \mathbb{R} &\to S^1 \\ r &\mapsto (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r) \end{aligned}$$

und die Wege

$$\begin{aligned} v_k \colon I &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto ks \end{aligned}$$

in $\mathbb{R}$ mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt k zu betrachten. Es ist dann $u_k = p \circ v_k$. Die Abbildung $p \colon \mathbb{R} \to S^1$ ist ein Beispiel einer Überlagerung.

[1] Auch wenn die noch vorhandene Zeit bestimmen wird, in welcher Ausführlichkeit wir uns mit diesem Thema beschäftigen werden.

15.1. Definition. Eine Abbildung $p\colon X \to Y$ heißt eine *Überlagerung*, wenn X und Y wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Hausdorffräume sind, p surjektiv ist und zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung U existiert, so dass für jede Wegkomponente V von $p^{-1}[U]$ die Einschränkung von p einen Homöomorphismus $V \to U$ ergibt. Mengen U dieser Art nennen wir *gleichmäßig überdeckt* oder *elementar*, die Wegkomponenten von $p^{-1}[U]$ die *Blätter* über U.

15.2. Proposition. *Die oben beschriebene Abbildung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ ist eine Überlagerung.*

Beweis. Zunächst sind $\mathbb{R}$ und S^1 zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und hausdorffsch. Außerdem ist p surjektiv. Sei nun $x \in S^1$ beliebig, etwa $x = p(r)$. Wir zeigen, dass $U := S^1 \setminus \{x\}$ gleichmäßig überdeckt ist. U ist offen und $p^{-1}[U] = \mathbb{R} \setminus \{r + z : z \in \mathbb{Z}\}$. Die Wegkomponenten von $p^{-1}[U]$ sind also die offenen Intervalle $(r + z, r + z + 1)$ für $z \in \mathbb{Z}$. Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ ist die Einschränkung von p

$$\begin{aligned}(r+z, r+z+1) &\to U\\ z &\mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)\end{aligned}$$

ein Homöomorphismus. Ist nun $y \in S^1$ beliebig, so liegt y in der gleichmäßig überdeckten Menge $S^1 \setminus \{-y\}$. □

Ist Z ein Raum, $p\colon X \to Y$ eine Überlagerung und $f\colon Z \to Y$ eine stetige Abbildung, so können wir uns fragen, ob eine stetige *Hochhebung* von f, also eine Abbildung $\tilde{f}\colon Z \to X$ mit $p \circ \tilde{f} = f$, existiert. Das wird im allgemeinen von Z und f abhängen. Für Wege, also für $Z = I$, werden wir nun aber sehen, dass eine stetige Hochhebung immer existiert und zwar für jedes $x \in p^{-1}[\{f(0)\}]$ genau eine mit $\tilde{f}(0) = x$.

Ist der Weg so kurz, dass er ganz in einer gleichmäßig überdeckten Menge verläuft, so ist dies klar. Im allgemeinen werden wir den Weg in so kurze Stücke zerlegen, dass dies für diese gilt. Dies wird das Lebesgue-Lemma leisten, das wahrscheinlich aus der Analysis-Grundvorlesung bekannt ist. Wir erinnern kurz daran.

15.3. Lemma (Lebesgue). *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von X. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für jedes $x \in X$ ein $O \in \mathcal{C}$ existiert, so dass $B_\delta(x) \in O$.*

Beweis. Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $\varepsilon_x > 0$, so dass $B_{2\varepsilon_x}(x)$ in einem Element von $\mathcal{C}$ liegt. Da $\{B_{\varepsilon_x}(x) : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X ist, existiert aufgrund der Kompaktheit von X ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n$, so dass $X = \bigcup_{k=1}^n B_{\varepsilon_{x_n}}(x_n)$. Setze $\delta := \min\{\varepsilon_{x_n} : 1 \leq k \leq n\}$. Ist nun $y \in X$ beliebig, so existiert ein k mit $y \in B_{\varepsilon_{x_k}}(x_k)$. Nun ist $B_\delta(y) \subset B_{2\varepsilon_{x_k}}$ und liegt damit ganz in einem Element von $\mathcal{C}$. □

15.4. Proposition (Hochheben von Wegen). *Ist $p\colon X \to Y$ eine Überlagerung, $w\colon I \to Y$ stetig und $x_0 \in X$ mit $p(x_0) = w(0)$, dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{w}\colon I \to X$ mit $\tilde{w}(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{w} = w$.*

Beweis. Sei $\{U_j : j \in J\}$ die Menge der gleichmäßig überdeckten Teilmengen von X. Dann ist $\{w^{-1}[U_j] : j \in J\}$ eine offene Überdeckung von I. Nach dem Lebesgue-Lemma gibt es also ein $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass zu jedem k mit $0 < k \leq N$ ein $j \in J$ mit $w\left[\left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]\right] \subset U_j$ existiert. Für solches N werden wir für $0 \leq k \leq N$ induktiv zeigen, dass es genau ein stetiges $\tilde{w}_k\colon \left[0, \frac{k}{N}\right] \to X$ mit $\tilde{w}_k(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{w}_k = w|_{\left[0, \frac{k}{N}\right]}$ gibt. Der Fall $k = N$ zeigt dann die Behauptung. Wir setzen $I_k := \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]$.

$\tilde{w}_0(0) = x_0$ erledigt $k = 0$. Sei nun $0 < k \leq N$ und Existenz und Eindeutigkeit von $\tilde{w}_{k-1}$ bereits gezeigt. Dann muss $\tilde{w}_k$, wenn es existiert, auf $\left[0, \frac{k-1}{N}\right]$ mit $\tilde{w}_{k-1}$ übereinstimmen. Es bleibt also zu zeigen, dass es genau ein stetiges $f\colon I_k \to X$ mit $f(\frac{k-1}{N}) = \tilde{w}_{k-1}\left(\frac{k-1}{N}\right)$ und $p \circ f = w|_{I_k}$ gibt. $\tilde{w}_k$ erhält man dann durch Zusammensetzen von $\tilde{w}_{k-1}$ und f. Nun gibt es ein $j \in J$ mit $w[I_k] \subset U_j$. Es ist $p\left(\tilde{w}_{k-1}\left(\frac{k-1}{N}\right)\right) = w\left(\frac{k-1}{N}\right) \in U_j$. Sei V die Wegkomponente von $p^{-1}[U_j]$, in der $\tilde{w}_{k-1}\left(\frac{k-1}{N}\right)$ liegt. Jede stetige Abbildung f mit den geforderten Eigenschaften muss nun, da I_k wegzusammenhängend ist, ihr Bild in V haben. Da die Einschränkung von p einen Homöomorphismus $V \to U_j$ liefert, gibt es genau ein solches f, nämlich die Komposition von $w|_{I_k}$ mit dem Inversen dieses Homöomorphismus. □

15.5. Korollar. *Die Abbildung Φ ist surjektiv.*

Beweis. Sei $\alpha \in \pi_1(S^1, (1,0))$, $\alpha = [w]$. Wir betrachten die oben beschriebene Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$. w lässt sich zu einem Weg in $\mathbb{R}$ mit Anfangspunkt 0 hochheben, das heißt es gibt einen stetigen Weg $\tilde{w}\colon I \to \mathbb{R}$ mit $w(0) = 0$ und $p \circ \tilde{w} = w$. Aus $p(\tilde{w}(1)) = w(1) = (1,0)$ folgt, dass $w(1) \in \mathbb{Z}$, sagen wir $w(1) = k$. Nun ist aber $\mathbb{R}$ konvex, also ist $\tilde{w} \simeq v_k$ rel $\{0,1\}$. Damit ist $\alpha = [w] = [p \circ \tilde{w}] = [p \circ v_k] = [u_k] = \Phi(k)$. □

Als nächstes wollen wir zeigen, dass Hochhebungen homotoper Wege mit gleichem Anfangspunkt homotop sind.

15.6. Proposition (Hochheben von Homotopien). *Sei $p\colon X \to Y$ eine Überlagerung und $F\colon I \times I \to Y$ stetig. Ist $\tilde{f}\colon I \to X$ stetig mit $p \circ \tilde{f} = F(\bullet, 0)$, so existiert eindeutig eine stetige Abbildung $\tilde{F}\colon I \times I \to X$ mit $\tilde{F}(\bullet, 0) = \tilde{f}$ und $p \circ \tilde{F} = F$.*

Beweis. Existiert ein solches $\tilde{F}$, so ist für jedes $s \in I$ die Einschränkung $\tilde{F}(s, \bullet)$ eine Hochhebung des Weges $F(s, \bullet)$ zu einem Weg mit Anfangspunkt $\tilde{f}(s)$. Aus der Eindeutigkeit von Hochhebungen von Wegen folgt also schon die Eindeutigkeit von $\tilde{F}$. Außerdem definiert dies $\tilde{F}$ bereits, so dass wir nur noch die Stetigkeit nachzuprüfen haben.

Aus dem Lebesgue-Lemma folgt wieder die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$, so dass $F\left[\left[\frac{l}{N}, \frac{l+1}{N}\right] \times \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]\right]$ für alle $0 \leq k, l < N$ in einer gleichmäßig überdeckten Menge enthalten ist. Es genügt, zu zeigen, dass für alle $0 \leq k, l < N$ die Einschränkung von $\tilde{F}$ auf $\left[\frac{l}{N}, \frac{l+1}{N}\right] \times \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$ stetig ist, da $I \times I$ die Vereinigung dieser endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist. Wir tun dies für festes l per Induktion über k. Zur Abkürzung setzen wir $B := \left[\frac{l}{N}, \frac{l+1}{N}\right]$ und $I_k := \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$.

Sei also $0 \leq k < N$ und $\tilde{F}$ für alle $k' < k$ auf $B \times I_{k'}$ stetig. Dann ist $\tilde{F}$ zumindest auf $B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}$ stetig. (Für $k = 0$ folgt das aus der Stetigkeit von $\tilde{f}$.) Sei U eine gleichmäßig überdeckte Menge, die $F[B \times I_k]$ enthält. Da $B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}$ wegzusammenhängend ist, folgt nun aus der Stetigkeit von $\tilde{F}$ auf dieser Menge, dass $\tilde{F}\left[B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}\right]$ ganz in einer Wegkomponente V von $p^{-1}[U]$ liegt. Da ja die Einschränkung von p einen Homöomorphismus von V auf U ergibt, existiert eine stetige Abbildung $G\colon B \times I_k \to V$ mit $p \circ G = F|_{B \times I_k}$ und $G|_{B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}} = \tilde{F}|_{B \times \left\{\frac{k}{N}\right\}}$. Für jedes $r \in B$ sind $G|_{\{r\} \times I_k}$ und $\tilde{F}|_{\{r\} \times I_k}$ Hochhebungen von $F|_{\{r\} \times I_k}$ mit $G\left(r, \frac{k}{N}\right) = \tilde{F}\left(r, \frac{k}{N}\right)$. Aus der Eindeutigkeit von Hochhebungen von Wegen bei vorgegebenem Anfangspunkt folgt, dass $\tilde{F}$ auf $B \times I_k$ mit G übereinstimmt und daher dort stetig ist. □

15.7. Korollar. *Sei $p\colon X \to Y$ eine Überlagerung, $v, w\colon I \to Y$ stetig. Ist $v \simeq w$ rel $\{0,1\}$ und sind $\tilde{v}, \tilde{w}\colon I \to X$ stetige Hochhebungen mit gleichem Anfangspunkt, also $v = p \circ \tilde{v}$, $w = p \circ \tilde{w}$, $\tilde{v}(0) = \tilde{w}(0)$, so ist $\tilde{v} \simeq \tilde{w}$ rel $\{0,1\}$, also insbesondere $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$.*

Beweis. Sei F eine Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ zwischen v und w. Dann existiert nach dem eben gezeigten eine stetige Abbildung $\tilde{F}\colon I \times I \to X$ mit $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{v}(0)$ für alle $s \in I$. Da $\tilde{F}(0, \bullet)$ eine stetige Hochhebung des konstanten Weges $F(0, \bullet)$ ist, konstante Wege aber sicher eine konstante Hochhebung besitzen, folgt aus der Eindeutigkeit der Hochhebung eines Weges bei gegebenem Anfangspunkt, dass $F(0, t) = \tilde{v}(0)$ für alle $t \in I$ und ebenso $F(1, t) = \tilde{v}(1)$. Nun sind $\tilde{F}(\bullet, 1)$ und $\tilde{w}$ beides stetige Hochhebungen von $F(\bullet, 1) = w$ und $F(0, 1) = \tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$, also $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{w}(s)$ für alle $s \in I$. Wir haben gezeigt, dass $\tilde{F}$ eine Homotopie zwischen $\tilde{v}$ und $\tilde{w}$ relativ zu $\{0,1\}$ ist. □

15.8. Korollar. *Die Abbildung Φ ist injektiv.*

Beweis. Seien $k, l \in \mathbb{Z}$, $\Phi(k) = \Phi(l)$, also $[u_k] = [u_l]$. v_k und v_l sind Hochhebungen von u_k beziehungsweise u_l und $v_k(0) = 0 = v_l(0)$. Aus $[u_k] = [u_l]$ folgt nun $k = v_k(1) = v_l(1) = l$. □

15.9. Korollar. *S^1 ist nicht zusammenziehbar.*

Beweis. Zusammenziehbare Räume haben triviale Fundamentalgruppen, aber $\pi_1(S^1, (1,0))$ ist nicht trivial. □

15.10. Proposition. *Die Abbildung $\Phi\colon (\mathbb{Z},+) \to \pi_1(S^1,(1,0))$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass Φ eine Bijektion ist, müssen also nur noch zeigen, dass Φ ein Homomorphismus ist. Seien $k, l \in \mathbb{Z}$. v_k ist eine Hochhebung von u_k mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt k. Nun ist

$$\begin{aligned} w\colon I &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto k + ls \end{aligned}$$

eine Hochhebung von u_l mit Anfangspunkt k und Endpunkt $k+l$. Wir können also $v_k * w$ bilden, und da $\mathbb{R}$ konvex und dies ein Weg mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt $k+l$ ist, gilt $v_k * w \simeq v_{k+l}$ rel $\{0,1\}$. Es folgt $\Phi(k)\Phi(l) = [u_k][u_l] = [u_k * u_l] = [(p\circ v_l)*(p\circ w)] = [p\circ(v_l * w)] = [p\circ v_{k+l}] = [u_{k+l}] = \Phi(k+l)$. $\square$

Dies ermöglicht nun schon einige Anwendungen, die aus Motivationsgründen hier sofort folgen sollten, die wir aber aus Zeitgründen noch aufschieben wollen. Sorry!