Lieferung 16

Erste Anwendungen der Fundamentalgruppe

Anstatt sich für etwas zu entschuldigen, soll man es lieber besser machen. Hier kommen daher die Anwendungen, deren Aufschiebung wir gerade beklagt haben.

Der Brouwersche Fixpunktsatz

Bisher haben wir nur die Fundamentalgruppen des Punktes und der Kreislinie und damit auch aller Räume, die zu einem dieser homotopieäquivalent sind, berechnet. Das genügt aber schon für die folgende Proposition.

16.1. Proposition. *Es gibt keine stetige Retraktion von der Kreisscheibe auf die Kreislinie, das heißt keine stetige Abbildung* $r\colon D^2 \to S^1$ *mit* $r|_{S^1} = \mathrm{id}_{S^1}$.

Beweis. Sei $p \in S^1$ ein Punkt, $i\colon (S^1, p) \to (D^2, p)$ die Inklusion, und $r\colon (D^2, p) \to (S^1, p)$ stetig. Wir betrachten die induzierten Homomorphismen

$$\pi_1(S^1, p) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(D^2, p) \xrightarrow{r_\#} \pi_1(S^1, p).$$

Da D^2 zusammenziehbar (sogar konvex) ist, ist $\pi_1(D^2, p)$ trivial. Damit ist auch die Komposition $r_\# \circ i_\# = (r \circ i)_\#$ trivial. Da aber $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$ nicht trivial ist, ist $\mathrm{id}_{\pi_1(S^1,p)} = (\mathrm{id}_{(S^1,p)})_\#$ nicht trivial. Es ist also $r \circ i \not\simeq \mathrm{id}_{(S^1,p)}$ und insbesondere $r \circ i \neq \mathrm{id}_{(S^1,p)}$. □

Dies ist auch für Abbildungen $D^{m+1} \to S^m$ wahr. Der Fall $m = 0$ ist gerade der Zwischenwertsatz, der Fall $m > 1$ liegt nicht im Bereich der Methoden, die wir im Moment zur Verfügung haben.

Als direkte Folgerung haben wir:

16.2. Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz in Dimension 2). *Jede stetige Abbildung* $f\colon D^2 \to D^2$ *hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $f\colon D^2 \to D^2$ stetig und fixpunktfrei. Wir zeigen, dass die Existenz einer stetigen Retraktion $r\colon D^2 \to S^1$ folgt, was der vorhergehenden Proposition widerspricht.

Die folgende Konstruktion ist an dieser Stelle die übliche, da man dazu eine gute Zeichnung anfertigen kann. Man tue dies und merke sich diese Konstruktion. Sei $x \in D^2$. Da $f(x) \neq x$ existiert ein eindeutig bestimmter von $f(x)$ ausgehender Strahl, der durch x geht. Man definiere $r(x)$ als den Schnittpunkt dieses Strahls mit S^1. Offenbar ist für $x \in S^1$ dann $r(x) = x$. Leider ist es etwas lästig, die Stetigkeit von r nachzurechnen.

Wir geben daher noch eine weitere Konstruktion an. Dazu definieren wir zunächst

$$\begin{aligned} g\colon D^2 &\to D^2 \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} f(2x), & \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ (1 - \|x\|) f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \|x\| \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

g ist stetig und auch fixpunktfrei: Für $\|x\| \leq \frac{1}{2}$ folgt aus $g(x) = x$, dass $f(2x) = 2x$, und für $\|x\| > \frac{1}{2}$ ist $\|g(x)\| < \frac{1}{2}$. g hat aber die zusätzliche Eigenschaft, dass $g(x) = 0$ für alle $x \in S^1$. Daher ist die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} r\colon D^2 &\to S^1 \\ x &\mapsto \frac{x - g(x)}{\|x - g(x)\|} \end{aligned}$$

eine Retraktion. $\square$

Abbildungsgrad und der Hauptsatz der Algebra

16.3. Definition. Sei $f\colon S^1 \to S^1$ eine stetige Abbildung. Wir definieren den *Grad von* f, $\deg f$, als die ganze Zahl, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1, p) \arrow[r, "f_\#"] & \pi_1(S^1, f(p)) \arrow[r, "h_w", "\cong"'] & \pi_1(S^1, p) \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "\cong", "\Phi"'] \arrow[rr, "\cdot \deg f"] & & \mathbb{Z} \arrow[u, "\cong", "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, wobei $p = (1, 0)$, w ein beliebiger stetiger Weg von p nach $f(p)$, h_w der Isomorphismus aus Definition 14.10 und Φ der Isomorphismus aus Proposition 15.10 ist.

16.4. Proposition. *Der Grad von f ist wohldefiniert, und sind $f, g\colon S^1 \to S^1$ homotope Abbildungen, so ist* $\deg f = \deg g$.

Beweis. Da alle Abbildungen in dem definierenden Diagramm Homomorphismen sind und jeder Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ die Multiplikation mit einer ganzen Zahl ist, existiert eine ganze Zahl $\deg f$, die das Diagramm kommutativ macht und für die Wohldefiniertheit ist nur die Unabhängigkeit von der Wahl des Weges w zu zeigen. Ist w' ein weiterer Weg von p nach $f(p)$, so haben wir in Proposition 14.12 gezeigt, dass sich h_w und $h_{w'}$ nur um einen inneren Isomorphismus von $\pi_1(S^1, p)$ unterscheiden. Da aber $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$ abelsch ist, ist dann $h_w = h_{w'}$.

Seien nun $f, g\colon S^1 \to S^1$ homotop und v ein Weg von $f(p)$ nach $g(p)$. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1,p) \arrow[r, "g_\#"] \arrow[dr, "f_\#"'] & \pi_1(S^1,g(p)) \arrow[d, "h_v"] \arrow[dr, "h_{w*v}"] & \\ & \pi_1(S^1,f(p)) \arrow[r, "h_w"'] & \pi_1(S^1,p) \end{tikzcd}$$

kommutiert nun das linke Dreieck wegen Proposition 14.13 und das rechte Dreieck wegen Proposition 14.11. Da $w * v$ ein Weg von p nach $g(p)$ ist, folgt $\deg f = \deg g$. □

16.5. Proposition. *Sei $k \in \mathbb{Z}$ und S^1 aufgefasst als die Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1. Dann ist der Grad der Abbildung*

$$S^1 \to S^1$$
$$z \mapsto z^k$$

gleich k.

Beweis. Sei f die Abbildung $f(z) = z^k$. Da $f(1) = 1$ ist, können wir den in der Definition von $\deg f$ vorkommenden Weg w konstant wählen, also ist $h_w = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1,1)}$, und wir werden h_w in der Notation unterdrücken.

Sei $l \in \mathbb{Z}$. Der Weg u_l, der in der Definition von Φ vorkam, war gerade durch $u_l(r) = \exp(2\pi i \cdot lr)$ gegeben, auch wenn wir es dort anders formuliert haben. Dann ist $f(u_l(r)) = \exp(2\pi i \cdot lr)^k = \exp(2\pi i \cdot klr) = u_{kl}(r)$, also $f_\#(\Phi(l)) = f_\#([u_l]) = [f \circ u_l] = [u_{kl}] = \Phi(kl)$, also, da l beliebig war, $\deg f = k$. □

16.6. Korollar (Hauptsatz der Algebra). *Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein komplexes Polynom vom Grad n, also $a_n \neq 0$. Hat p keine Nullstelle, so ist $n = 0$.*

Beweis. Die Idee ist die folgende: Da p keine Nullstelle hat, ist für jede nichtnegative reelle Zahl r die Abbildung

$$f_r\colon S^1 \to S^1$$
$$z \mapsto \frac{p(rz)}{|p(rz)|}$$

definiert, die das Verhalten von p auf dem Kreis mit Radius r wiedergibt. Nun ist f_0 konstant, aber für $r \to \infty$ geht die Abbildung f_r gegen die Abbildung $z \mapsto z^n$. Das zeigt, dass die Abbildung $z \mapsto z^n$ homotop zu einer konstanten Abbildung und damit vom Grad 0 ist. Die Sache mit dem Grenzübergang muss man natürlich genauer machen, und das werden wir nun tun.

Zunächst definieren wir

$$\begin{aligned} F\colon S^1 \times I &\to S^1 \\ (z,r) &\mapsto f_r(z). \end{aligned}$$

F ist stetig und damit $f_0 \simeq f_1$. Weiter definieren wir für $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g_r\colon S^1 &\to S^1 & \qquad G\colon S^1 \times I &\to S^1 \\ z &\mapsto \frac{\sum_{k=0}^n a_k r^{n-k} z^k}{\left|\sum_{k=0}^n a_k r^{n-k} z^k\right|}, & (z,r) &\mapsto g_r(z). \end{aligned}$$

Für $r > 0$ ist der Nenner von $g_r(z)$ gleich $r^n |p\left(\frac{z}{r}\right)| \neq 0$. (Also, nach Kürzen, $g_r = f_{1/r}$, was die Verbindung zum einleitenden Absatz schafft.) Es ist $g_0(z) = \frac{a_n z^n}{|a_n z^n|} = \frac{a_n}{|a_n|} z^n$. Damit ist g_r tatsächlich für alle $r \in \mathbb{R}$ definiert, und da G stetig ist, ist $g_0 \simeq g_1$. Da aber $g_1 = f_1$, folgt $g_0 \simeq f_0$. Nun ist $f_0(z) = \frac{a_0}{|a_0|} = \frac{a_0}{|a_0|} z^0$, $g_0(z) = \frac{a_n}{|a_n|} z^n$. Es folgt $n = \deg g_0 = \deg f_0 = 0$. Bei der Berechnung des Grades haben wir noch benutzt, dass für $b \in S^1$ die Abbildung $z \mapsto bz$ homotop zur Identität ist. Um das einzusehen betrachtet man einen Weg von b nach 1. □

16.7. Bemerkung. Man kann diesen Beweis auch für reelle Polynome durchführen. Man erhält dann Abbildungen $f_r\colon S^0 \to S^0$ und dass die Abbildung $S^0 \to S^0$, $x \mapsto \frac{a_n}{|a_n|} x^n$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Da id_{S_0} nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist (Zwischenwertsatz!), folgt, dass n ungerade ist. Das ist wohl in etwa die komplizierteste Art, zu zeigen, dass ein reelles Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle hat.