Lieferung 17

Der Satz von Seifert und van Kampen

Sind X ein Raum, $U, V \subset X$ und $p \in U \cap V$, so geben uns die verschiedenen Inklusionen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} (U \cap V, p) \arrow[r] \arrow[d] & (U, p) \arrow[d] \\ (V, p) \arrow[r] & (X, p). \end{tikzcd}$$

Daraus resultiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, p) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, p) \arrow[d] \\ \pi_1(V, p) \arrow[r] & \pi_1(X, p). \end{tikzcd}$$

Wir werden sehen, dass unter gewissen Voraussetzungen, darunter $U \cup V = X$, dieses Diagramm eine gewisse Eigenschaft hat, die unter anderem dazu führt, dass es bis auf Isomorphie (wir werden das noch genauer formulieren) bereits von dem Teildiagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, p) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, p) \\ \pi_1(V, p) & \end{tikzcd}$$

bestimmt wird. Wenn wir diese drei Fundamentalgruppen und die von den Inklusionen induzierten Homomorphismen zwischen ihnen kennen, können wir also $\pi_1(X)$ ‚ausrechnen'. Die Eigenschaft, die hierzu führt, werden wir nun kennenlernen.

Push-Out-Diagramme

17.1. Definition. Es sei

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & H \arrow[d, "i"] \\ K \arrow[r, "j"] & L \end{tikzcd}$$

ein Diagramm von Gruppen und Homomorphismen. Dieses Diagramm heißt ein *Push-Out-Diagramm*, wenn es kommutiert und für jede Gruppe L' und alle Homomorphismen $i' \colon H \to L'$, $j' \colon K \to L'$, so dass $i' \circ g = j' \circ h$, genau ein Homomorphismus $k \colon L \to L'$ existiert, so dass $k \circ i = i'$ und $k \circ j = j'$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & H \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "i'"] & \\
K \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "j'"'] & L \arrow[dr, dotted, "k", "!"'] & \\
& & L'
\end{tikzcd}$$

Ist das Diagramm ein Push-Out-Diagramm, so nennen wir L, beziehungsweise genauer (L, i, j) das *Push-Out* des aus g und h bestehenden Teildiagramms.

17.2. Proposition (Eindeutigkeit des Push-Outs). *Sind*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & H \arrow[d, "i"] \\
K \arrow[r, "j"] & L
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & H \arrow[d, "i'"] \\
K \arrow[r, "j'"] & L'
\end{tikzcd}$$

Push-Out-Diagramme, so existiert ein Isomorphismus $k \colon L \to L'$, so dass

$$\begin{tikzcd}
& H \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "i'"] & \\
K \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "j'"'] & L \arrow[dr, "k", "\cong"'] & \\
& & L'
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Die Existenz eines Homomorphismus k, so dass das Diagramm kommutiert folgt daraus, dass L ein Push-Out von g, h ist. Ebenso folgt daraus, dass L' ein Push-Out ist, die Existenz eines Homorphismus $k' \colon L' \to L$, so dass das Diagramm mit k' an Stelle von k kommutiert. Es ist nun nur noch zu zeigen, dass k und k' invers zu einander sind. Dazu bemerken wir, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & H \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "i"] & \\
K \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "j"'] & L \arrow[dr, "k' \circ k"] & \\
& & L
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Da das Diagramm auch mit id_L an Stelle von $k' \circ k$ kommutiert, folgt aus der Tatsache, dass L ein Push-Out ist, es also nur einen Homomorphismus an dieser Stelle gibt, der das Diagramm kommutativ macht, dass $k' \circ k = \mathrm{id}_L$. Ebenso folgt aus der Tatsache, dass L' ein Push-Out ist, dass $k \circ k' = \mathrm{id}_{L'}$. Damit ist k ein Isomorphismus. $\square$

An dieser Stelle wäre es schön zu wissen, ob Push-Outs (für Gruppen, wie hier definiert) immer existieren—sie tun es—und wie sie konstruiert werden. Da Gruppen keine ganz einfachen Objekte sind, ist dies leider technisch nicht ganz unaufwändig, so dass wir hier darauf, verzichten, da wir diese Tatsache nicht unbedingt brauchen. Es bleibt zu hoffen, dass der Beweis des folgenden Satzes und die nachfolgenden Spezialfälle ein ausreichendes Gefühl für die Struktur von Push-Outs vermitteln.

Der Satz von Seifert und van Kampen

17.3. Satz (Seifert und van Kampen). *Sei X ein Raum und $U_0, U_1 \subset X$ offene Teilmengen, $x_0 \in U \cap V$. Ist $X = U_0 \cup U_1$ und ist $U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend, so ist das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) \arrow[r, "j^0_\#"] \arrow[d, "j^1_\#"] & \pi_1(U_0, x_0) \arrow[d, "i^0_\#"] \\
\pi_1(U_1, x_0) \arrow[r, "i^1_\#"] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

ein Push-Out Diagramm. Hierbei seien i^0, i^1, j^0, j^1 die offensichtlichen Inklusionen zwischen den verschiedenen Räumen.

Beweis des Satzes

Die Kommutativtät des Diagramms ist klar. Für den Beweis, dass es ein Push-Out-Diagramm ist, betrachten wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) \arrow[r, "j^0_\#"] \arrow[d, "j^1_\#"] & \pi_1(U_0, x_0) \arrow[d, "i^0_\#"] \arrow[ddr, bend left, "\phi_0"] & \\
\pi_1(U_1, x_0) \arrow[r, "i^1_\#"] \arrow[drr, bend right, "\phi_1"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[dr, dotted, "\psi", "!"'] & \\
& & G,
\end{tikzcd}$$

wobei G eine beliebige Gruppe ist und ϕ_0, ϕ_1 beliebige Homomorphismen sind, so dass das Diagramm ohne ψ kommutiert. Wir haben dann zu zeigen, dass es genau einen Homomorphismus ψ gibt, so dass das gesamte Diagramm kommutiert. Dazu gehen wir nach einem beliebten Schema vor: Wir zeigen zunächst, dass der Homomorphismus, wenn er existiert, eindeutig bestimmt ist. Dabei werden wir sehen, wie der Homomorphismus aussehen muss und werden dies zu seiner Definition nutzen. Der nächste Schritt wird dann darin bestehen, zu zeigen, dass er dadurch wohldefiniert ist.

17.4. Beweisschritt. *Die Bilder von $i^0_\#$ und $i^1_\#$ erzeugen zusammen $\pi_1(X, x_0)$.*

Beweis. Sei $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ repräsentiert durch den geschlossenen Weg w. Da $\{U_0, U_1\}$ eine offene Überdeckung von X ist, liefert uns das Lebesgue-Lemma ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle k mit $0 \leq k < N$ ein r_k mit $w\,[[k/N, (k+1)/N]] \subset U_{r_k}$ existiert. Es ist bereits $w(0) = w(1) = x_0$, und wir zeigen nun, dass wir es immer so einrichten können, dass $w(k/N) = x_0$ für alle k mit $0 \leq k \leq N$. Dazu wählen wir zu jedem k mit $0 < k < N$ einen Weg v_k von $w(k/N)$ nach x_0. Da $U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend ist, können wir es so einrichten, dass v_k in $U_{r_{k-1}} \cap U_{r_k}$ verläuft. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir außerdem $v_0 = v_N = c_{x_0}$. Nun ersetzen wir w durch einen Weg w', indem wir für $0 \leq k < N$ am Anfang des Stücks $w|_{[k/N,(k+1)/N]}$ den Weg v_k^- und am Ende den Weg v_{k+1} einsetzen. Wir machen das an dieser Stelle exakt und werden uns später mit solchen verbalen Beschreibungen begnügen:

$$\begin{aligned} w' \colon I &\to X \\ s &\mapsto \begin{cases} v_k^-\left(3N\left(s - \frac{k}{N}\right)\right), & \frac{k}{N} \leq s \leq \frac{3k+1}{3N}, \\ w\left(\frac{k}{N} + 3\left(s - \frac{3k+1}{3N}\right)\right), & \frac{3k+1}{3N} \leq s \leq \frac{3k+2}{3N}, \\ v_{k+1}\left(3N\left(s - \frac{3k+2}{3N}\right)\right), & \frac{3k+2}{3N} \leq s \leq \frac{k+1}{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Da wir an den Enden konstante Wege und an den Stellen k/N für $0 < k < N$ die Wege $v_k * v_k^-$, die relativ zu $\{0,1\}$ homotop zu konstanten Wegen sind, eingefügt haben, ist $[w'] = [w] = \gamma$. Aufgrund der Wahl der v_k ist auch $w'\,[[k/N, (k+1)/N]] \subset U_{r_k}$. Da nun $w'(k/N) = x_0$ für alle k, repräsentiert $w|_{[k/N,(k+1)/N]}$ ein $\alpha_k \in \pi_1(U_{r_k})$, $0 \leq k < N$. Damit ist $\gamma = i^{r_0}_\#(\alpha_0) i^{r_1}_\#(\alpha_1) \cdots i^{r_{N-1}}_\#(\alpha_{N-1})$. □

Damit ist schon die Eindeutigkeit von ψ gezeigt: Ist nämlich $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ beliebig und ist mit den gerade benutzten Bezeichnungen $\gamma = i^{r_0}_\#(\alpha_0) \cdots i^{r_{N-1}}_\#(\alpha_{N-1})$, so muss für ein ψ, das das Diagramm kommutativ macht,

$$\begin{aligned} \psi(\gamma) &= \psi(i^{r_0}_\#(\alpha_0) \cdots i^{r_{N-1}}_\#(\alpha_{N-1})) \\ &= \psi(i^{r_0}_\#(\alpha_0)) \cdots \psi(i^{r_{N-1}}_\#(\alpha_{N-1})) \\ &= \phi_{r_0}(\alpha_0) \cdots \phi_{r_{N-1}}(\alpha_{N-1}) \end{aligned}$$

gelten.

17.5. Beweisschritt. *Durch*

$$\begin{aligned} \psi\colon \pi_1(X,x_0) &\to G \\ i_\#^{r_0}(\alpha_0)\cdots i_\#^{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) &\mapsto \phi_{r_0}(\alpha_0)\cdots\phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

wird ein Homomorphismus definiert, der das Diagramm kommutativ macht.

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass sich jedes Element aus $\pi_1(X,x_0)$ auf die angegebene Art darstellen lässt. Auch ist klar, dass ψ so, wenn es denn wohldefiniert ist, zu einem Homomorphismus wird. Es ist also nur noch zu zeigen, dass verschiedene Darstellungen des selben Elementes den gleichen Wert liefern, dass also aus $i_\#^{r_0}(\alpha_0)\cdots i_\#^{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = i_\#^{r'_0}(\alpha'_0)\cdots i_\#^{r'_{n'-1}}(\alpha'_{n'-1})$ folgt, dass $\phi_{r_0}(\alpha_0)\cdots\phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = \phi_{r'_0}(\alpha'_0)\cdots\phi_{r'_{n-1}}(\alpha'_{n-1})$. Da alle beteiligten Abbildungen Homomorphismen sind, genügt es zu zeigen, dass aus $i_\#^{r_0}(\alpha_0)\cdots i_\#^{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = 1$ folgt, dass $\phi_{r_0}(\alpha_0)\cdots\phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = 1$.

Sei also $n\in\mathbb{N}$ und für $0\le k<n$ sei $r_k\in\{0,1\}$ und $\alpha_k\in\pi_1(U_{r_k},x_0)$, so dass $\phi_{r_0}(\alpha_0)\cdots\phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = 1$. Es sei $H\colon I\times I\to X$ eine Homotopie, die diese Gleicheit zeigt, und zwar sei $H(0,\bullet) = H(1,\bullet) = H(\bullet,1) = c_{x_0}$ und $H(\bullet,1)|_{[k/n,(k+1)/n]}$ repräsentiere α_k. Nun wenden wir wieder das Lebesgue-Lemma an, um ein $m\in\mathbb{N}$ zu erhalten, so dass mit $N:=mn$ für alle k,l mit $0\le k,l<N$ ein $s_{k,l}$ mit $w\,[[k/N,(k+1)/N]\times[l/N,(l+1)/N]]\subset U_{s_{k,l}}$ existiert. Wir können diese $s_{k,l}$ so wählen, dass $s_{k,0} = r_{\lfloor k/m\rfloor}$ für alle k.

Zunächst zeigen wir, dass wir es so einrichten können, dass H auf allen Gitterpunkten den Wert x_0 annimmt, dass also $H(k/N,l/N) = x_0$ für alle $0\le k,l\le N$. Dazu definieren wir für alle $0<k<N$, $0\le l<N$ einen Weg $v_{k,l}\colon I\to U_{s_{k-1,l}}\cap U_{s_{k,l}}$ durch $v_{k,l}(t) := H(k/N,(l+t)/N)$ und einen Weg $w_{k,l}$ von $H(k/N,l/N)$ nach x_0, der in U_0 verläuft, falls $H(k/N,l/N)\in U_0$, in U_1, falls $H(k/N,l/N)\in U_1$ und konstant ist, falls $H(k/N,l/N) = x_0$. Außerdem setzen wir $w_{k,N} = c_{x_0}$ für $0<k<N$. Dann wählen wir für alle $0<k<N$, $0\le l<N$ eine Abbildung $F_{k,l}\colon I\times I\to U_{s_{k-1,l}}\cap U_{s_{k,l}}$ mit $F_{k,l}(0,\bullet) = F_{k,l}(1,\bullet) = v_{k,l}$ und $F_{k,l}(\bullet,0) = w_{k,l}*w_{k,l}^-$, $F_{k,l}(\bullet,1) = w_{k+1,l}*w_{k+1,l}^-$. Dies ist möglich, da die auf dem Rand vorgegebene Abbildung homotop zu einer konstanten Abbildung ist (siehe Aufgabe 37). Nun können wir H, indem wir an der Stelle $\{k/N\}\times[l/N,(l+1)/N]$ die Abbildung $F_{k,l}$ einpassen, so abändern, dass die oben bemerkten Eigenschaften von H erhalten bleiben und H zusätzlich auf allen Gitterpunkten den Wert x_0 annimmt. Wir werden diese geänderte Abbildung weiterhin H nennen.

Die alten w und v vergessend definieren wir nun Wege

$$\begin{aligned} w_{k,l}\colon I &\to X, && 0\le k<N, 0\le k\le N, \\ t &\mapsto H((k+t)/N,l/N), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v_{k,l}\colon I &\to X, \qquad\qquad 0 \le k \le N, 0 \le k < N,\\ t &\mapsto H(k/N,(l+t)/N). \end{aligned}$$

Für $0 \le k,l < N$ gibt uns das Klassen $\beta_{k,l}, \gamma_{k,l}, \delta_{k,l}, \epsilon_{k,l} \in \pi_1(U_{s_{k,l}})$ durch

$$\beta_{k,l} := [w_{k,l}], \qquad \gamma_{k,l} := [w_{k,l+1}], \qquad \delta_{k,l} := [v_{k,l}], \qquad \epsilon_{k,l} := [v_{k+1,l}].$$

Nun ist $\alpha_k = \beta_{mk,0}\beta_{mk+1,0}\cdots\beta_{m(k+1)-1,0}$ für $0 \le k < n$ und $\gamma_{k,N-1} = 1$ für alle $0 \le k < N$. Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} &\phi_{s_{0,0}}(\beta_{0,0})\phi_{s_{1,0}}(\beta_{1,0})\cdots\phi_{s_{N-1,0}}(\beta_{N-1,0}) =\\ &\qquad = \phi_{s_{0,N-1}}(\gamma_{0,N-1})\phi_{s_{1,N-1}}(\gamma_{1,N-1})\cdots\phi_{s_{N-1,N-1}}(\gamma_{N-1,N-1}). \end{aligned}$$

Wir tun dies in zwei Schritten.

Für alle $0 \le k < N$ *und* $0 \le l < N-1$ *ist* $\phi_{s_{k,l}}(\gamma_{k,l}) = \phi_{s_{k,l+1}}(\beta_{k,l+1})$*:* Nach Definition ist $\gamma_{k,l} = [w_{k,l+1}]$, $\beta_{k,l+1} = [w_{k,l+1}]$. Ist $s_{k,l} = s_{k,l+1}$, so ist $\gamma_{k,l} = \beta_{k,l+1}$ und alles klar. Ist $s_{k,l} \ne s_{k,l+1}$, so leben $\gamma_{k,l}$ und $\beta_{k,l+1}$ in verschiedenen Gruppen. In diesem Fall verläuft aber $w_{k,l+1}$ ganz in $U_0 \cap U_1$, so dass wir ein $\rho \in \pi_1(U_0 \cap U_1)$ durch $\rho := [w_{k,l+1}]$ definieren können. Es ist dann $\phi_{s_{k,l}}(\gamma_{k,l}) = (\phi_{s_{k,l}} \circ j_\#^{s_{k,l}})(\rho) = (\phi_{s_{k,l+1}} \circ j_\#^{s_{k,l+1}})(\rho) = \phi_{s_{k,l+1}}(\beta_{k,l+1})$.

Für alle $0 \le l < N$ *ist*

$$\phi_{s_{0,l}}(\beta_{0,l})\cdots\phi_{s_{N-1,l}}(\beta_{N-1,l}) = \phi_{s_{0,l}}(\gamma_{0,l})\cdots\phi_{s_{N-1,l}}(\gamma_{N-1,l}) :$$

Zunächst zeigt $H|_{[k/N,(k+1)/N]\times[l/N,(l+1)/N]}$ für $0 \le k < N$, dass $\beta_{k,l} = \delta_{k,l}\gamma_{k,l}\epsilon_{k,l}^{-1}$. Es ist also

$$\begin{aligned} &\phi_{s_{0,l}}(\beta_{0,l})\cdots\phi_{s_{N-1,l}}(\beta_{N-1,l}) =\\ &\quad = \phi_{s_{0,l}}(\delta_{0,l}\gamma_{0,l}\epsilon_{0,l}^{-1})\cdots\phi_{s_{N-1,l}}(\delta_{N-1,l}\gamma_{N-1,l}\epsilon_{N-1,l}^{-1}) =\\ &\qquad = \phi_{s_{0,l}}(1)\phi_{s_{0,l}}(\gamma_{0,l})\phi_{s_{0,l}}(\epsilon_{0,l})^{-1}\cdot\\ &\qquad\quad \cdot\phi_{s_{1,l}}(\delta_{1,l})\phi_{s_{1,l}}(\gamma_{1,l})\cdots\\ &\qquad\quad \cdots\phi_{s_{N-2,l}}(\gamma_{N-2,l})\phi_{s_{N-2,l}}(\epsilon_{N-2,l})^{-1}\cdot\\ &\qquad\quad \cdot\phi_{s_{N-1,l}}(\delta_{N-1,l})\phi_{s_{N-1,l}}(\gamma_{N-1,l})\phi_{s_{N-1,l}}(1). \end{aligned}$$

Es genügt also, für $0 \le k < N-1$ zu zeigen, dass $\phi_{s_{k,l}}(\epsilon_{k,l}) = \phi_{s_{k+1,l}}(\delta_{k+1,l})$. Nun werden $\epsilon_{k,l}$ und $\delta_{k+1,l}$ beide von $v_{k+1,l}$ repräsentiert, so dass sie für $s_{k,l} = s_{k+1,l}$ gleich sind und es ansonsten ein $\rho \in \pi_1(U_0 \cap U_1)$ mit $\epsilon_{k,l} = j_\#^{s_{k,l}}(\rho)$, $\delta_{k+1,l} = j_\#^{s_{k+1,l}}(\rho)$ gibt, so dass dies wieder aus der Kommutativität des Diagramms folgt. □

Damit ist auch der Satz bewiesen. □

Spezialfälle

Wir notieren Spezialfälle, in denen sich das Push-Out leichter beschreiben lässt. Zunächst holen wir kurz eine Definition nach.

17.6. Definition. Ein Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er nicht-leer und wegzusammenhängend ist und für ein $x_0 \in X$ (und damit für alle) die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ trivial ist.

17.7. Korollar. *Seien X ein Raum und $U_0, U_1 \subset X$ offene, einfach zusammenhängende Teilmengen, so dass $X = U_0 \cup U_1$ ist und $U_0 \cap U_1$ nicht-leer und wegzusammenhängend ist. Dann ist X einfach zusammenhängend.*

Beweis. Zunächst ist X nicht-leer und wegzusammenhängend. Sei nun $x_0 \in U_0 \cap U_1$ und die Notation die aus dem Satz. Dass $\pi_1(X, x_0)$ trivial ist, kann man nun einerseits aus dem Beweis des Satzes entnehmen, denn dort wurde gezeigt, dass diese Gruppe von $\operatorname{Im} i^0_\#$ und $\operatorname{Im} i^1_\#$ erzeugt wird, so dass sie trivial ist, wenn $\pi_1(U_0, x_0)$ und $\pi_1(U_1, x_0)$ trivial sind.

Wir können es aber auch direkt aus dem Satz folgern, denn man überzeugt sich sofort, dass, wenn wir 0 für die triviale Gruppe schreiben,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein Push-Out-Diagramm ist. Aus der Eindeutigkeit des Push-Outs folgt dann $\pi_1(X, x_0) \cong 0$. $\square$

17.8. Korollar. *Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei $x \in S^n$ der Nordpol und $y \in S^n$ der Südpol. Wir setzen $U_0 := S^n \setminus \{x\}$, $U_1 := S^n \setminus \{y\}$. Es sind $U_0, U_1 \approx \mathbb{R}^n$, also zusammenziehbar und damit einfach zusammenhängend. Außerdem ist $U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend (hier benutzen wir $n > 1$). Das vorherige Korollar liefert nun die Behauptung. $\square$

17.9. Korollar. *Seien X, U_0, U_1 und die sonstige Notation wie im Satz und U_1 einfach zusammenhängend. Wir betrachten*

$$\pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) \xrightarrow{j^0_\#} \pi_1(U_0, x_0) \xrightarrow{i^0_\#} \pi_1(X, x_0).$$

Es ist $i^0_\#$ surjektiv, und ist N der kleinste Normalteiler, der $\operatorname{Im} j^0_\#$ enthält, so ist $\operatorname{Ker} i^0_\# = N$. Insbesondere ist also $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U_0, x_0)/N$.

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) \arrow[r, "j^0_\#"] \arrow[d] & \pi_1(U_0, x_0) \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, bend left, "\phi"] & \\
0 \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \pi_1(U_0, x_0)/N \arrow[dr, dotted, "\psi", "!"'] & \\
& & G,
\end{tikzcd}
$$

wobei q die kanonische Quotientenabbildung und G eine beliebige Gruppe sei. Das Quadrat kommutiert, da $\operatorname{Im} j^0_\# \subset N = \operatorname{Ker} q$, also $q \circ j^0_\# = 0$. (Man beachte, dass der triviale Homomorphismus, den wir 0 schreiben, tatsächlich konstant 1 ist.) Das Diagramm ohne ψ kommutiert nun genau dann, wenn $\operatorname{Im} j^0_\# \subset \operatorname{Ker} \phi$, also, da $\operatorname{Ker} \phi$ ein Normalteiler ist, genau dann, wenn $N \subset \operatorname{Ker} \phi$. Nun ist aber eine Eigenschaft der Faktorgruppe, dass dann ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\psi \colon \pi_1(U_0, x_0)/N \to G$ mit $\psi \circ q = \phi$ existiert. Da die Bedingung, dass das untere Dreieck kommutiere, leer ist, ist das Diagramm ein Push-Out-Diagramm. Aus dem Satz und der Eindeutigkeit von Push-Outs folgt nun die Existenz eines Isomorphismus $h \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(U_0, x_0)/N$, so dass $h \circ i^0_\# = q$. Die Behauptung folgt danach sofort. $\square$