Lieferung 18

Der Effekt des Anheftens von Zellen auf die Fundamentalgruppe

Das Anheften einer Zelle

Sei X ein Raum, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $f\colon S^{n-1} \to X$ eine stetige Abbildung. Dann können wir den Raum

$$Y := X \cup_f D^n$$

betrachten. Wir sagen in dieser Situation, Y gehe aus X durch Ankleben einer n-Zelle hervor. Wir wollen nun mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen untersuchen, wie sich die Fundamentalgruppe von Y aus der von X ergibt.

Mit der Notation aus 6.15 haben wir eine Einbettung $j\colon X \to Y$ und die charakteristische Abbildung $\chi\colon D^n \to Y$. Wir bemerken:

18.1. Proposition. *$\chi|_{D^n \setminus S^{n-1}}$ ist eine offene Einbettung. Ist $A \subset D^n \setminus S^{n-1}$ und A abgeschlossen in D^n, so ist $\chi[A]$ abgeschlossen.*

Beweis. Y trägt die Finaltopologie bezüglich j und χ. Nach Konstruktion von Y ist außerdem $\chi|_{D^n \setminus S^{n-1}}$ injektiv. Ist nun $O \subset D^n \setminus S^{n-1}$, so ist $j^{-1}[\chi[O]] = \emptyset$ und $\chi^{-1}[\chi[O]] = O$. Ist also O offen, so auch $\chi[O]$. Das zeigt, dass $\chi|_{D^n \setminus S^{n-1}}$ eine offene Einbettung ist.

Ist $A \subset D^n \setminus S^{n-1}$, so ist $j^{-1}[Y \setminus \chi[A]] = X$ und $\chi^{-1}[Y \setminus \chi[A]] = D^n \setminus A$. Ist also A in D^n abgeschlossen, so ist auch $\chi[A]$ abgeschlossen. $\square$

Um den Satz von Seifert und van Kampen anwenden zu können, setzen wir nun

$$U_0 := Y \setminus \{\chi(0)\},$$
$$U_1 := \chi[D^n \setminus S^{n-1}].$$

Wir können U_0 mit $X \cup_f (D^n \setminus \{0\})$ identifizieren. Wenn wir annehmen, dass X wegzusammenhängend ist, erfüllen U_0 und U_1 für $n \geq 2$ die Voraussetzungen des Satzes von Seifert und van Kampen. Das einzige, das hierbei vielleicht nicht sofort ersichtlich ist, ist, dass U_0 wegzusammenhängend ist. Das folgt aber daraus, dass $U_0 \simeq X$:

18.2. Proposition. *Sei $n \geq 1$ und $r: U_0 \to X$ die Abbildung, die durch die Kommutativität von*

$$
\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\textit{Inkl.}"] \arrow[d, "f"] & D^n \setminus \{0\} \arrow[d, "\chi"] \arrow[ddr, bend left, "x \mapsto f(x/\|x\|)"] & \\
X \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{id}"'] & U_0 \arrow[dr, "r"] & \\
& & X
\end{tikzcd}
$$

gegeben ist (siehe Proposition 6.17). Dann ist $r \circ j = \mathrm{id}_X$ und $j \circ r \simeq \mathrm{id}_{U_0}$, wobei die Homotopie $H: U_0 \times I \to U_0$ durch $H(\bullet, t) = h_t$ und die Kommutativität von

$$
\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\textit{Inkl.}"] \arrow[d, "f"] & D^n \setminus \{0\} \arrow[d, "\chi"] \arrow[dr, "x \mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|}\right)x"] & \\
X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & U_0 \arrow[dr, "h_t"] & D^n \setminus \{0\} \arrow[d, "\chi"] \\
& X \arrow[r, "j"'] & U_0
\end{tikzcd}
$$

gegeben ist.

Beweis. Das einzige Problem ist die Stetigkeit von H. Es bezeichne $q: X + (D^n \setminus \{0\}) \to U_0$ die Quotientenabbildung. Wir betrachten das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
X \times I + (D^n \setminus \{0\}) \times I) \arrow[d, "\cong"] \arrow[ddr, bend left, "\tilde{H}"] & \\
(X \times (D^n \setminus \{0\})) \times I \arrow[d, "q \times \mathrm{id}_I"] & \\
U_0 \times I \arrow[r, "H"] & U_0.
\end{tikzcd}
$$

Die Abbildung links oben sei die offensichtliche; dass sie ein Homöomorphismus ist, rechne man zur Übung nach. $\tilde{H}$ sei durch die Kommutativität des Diagramms gegeben und ist stetig, denn die Restriktion auf $X \times I$ ist die Projektion auf X gefolgt von j, und die Restriktion auf $(D^n \setminus \{0\}) \times I$ ist die Komposition

$$(D^n \setminus \{0\}) \times I \xrightarrow{(x,t) \mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|}\right)x} (D^n \setminus \{0\}) \times I \xrightarrow{\chi} U_0.$$

Die Stetigkeit von H folgt also, wenn $q \times \mathrm{id}_I$ eine Quotientenabbildung ist, und das folgende Lemma sagt gerade dies. $\square$

18.3. Lemma. *Sei $q\colon X \to Y$ eine Quotientenabbildung und Z ein lokal kompakter Raum. Dann ist die Abbildung $q \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ eine Quotientenabbildung.*

Beweis. $q \times \mathrm{id}_Z$ ist offenbar stetig und surjektiv. Sei $U \subset Y \times Z$ mit $\tilde{U} := (q \times \mathrm{id}_Z)^{-1}[U]$ offen. Es ist zu zeigen, dass U offen ist.

Sei $(y, z) \in U$. Da q surjektiv ist, existiert $x \in X$ mit $q(x) = y$, also $(x, z) \in \tilde{U}$. Da $\tilde{U}$ offen und Z lokal kompakt ist, existiert $K \in \mathcal{U}(z)$, K kompakt, mit $\{x\} \times K \subset \tilde{U}$, also auch $\{y\} \times K \subset U$. Wir setzen nun $\tilde{V} := \left\{x' \in X\colon \{x'\} \times K \subset \tilde{U}\right\} = \{x' \in X\colon \{q(x')\} \times K \subset U\}$. Sei $x' \in \tilde{V}$. Dann existiert für beliebiges $k \in K$ eine Umgebung V_k von k, so dass $W_k := \left\{x'' \in X\colon \{x''\} \times V_k \subset \tilde{U}\right\}$ Umgebung von x' ist. Aufgrund der Kompaktheit von K existieren nun $n \in \mathbb{N}$ und $k_1, \dots, k_n \in K$, so dass $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{k_i}$. Dann ist $\bigcap_{i=1}^n W_{k_i}$ Umgebung von x' und $(\bigcap_{i=1}^n W_{k_i}) \times K \subset \tilde{U}$, also $\bigcap_{i=1}^n W_{k_i} \subset \tilde{V}$. Das zeigt, dass $\tilde{V}$ offen ist. Nun ist mit $V := \{y' \in Y\colon \{y'\} \times K \subset U\}$ gerade $\tilde{V} = q^{-1}[V]$, also ist V offen und $V \times K \subset U$ Umgebung von (y, z). Damit ist U offen. □

Der Effekt auf die Fundamentalgruppe

Da $U_1 \approx D^n \setminus S^{n-1}$ zusammenziehbar, also insbesondere einfach zusammenhängend, ist, folgt aus Korollar 17.9 für $n \geq 2$, dass mit beliebigem Basispunkt in $U_0 \cap U_1$ in der Komposition von von Inklusionen induzierten Homomorphismen

$$\pi_1(U_0 \cap U_1) \to \pi_1(U_0) \to \pi_1(Y)$$

der zweite Homomorphismus surjektiv und sein Kern der kleinste das Bild des ersten enthaltende Normalteiler ist. Wir können auch die ersten beiden Gruppen identifizieren: Es ist $U_0 \cap U_1 \approx D^n \setminus (S^{n-1} \cup \{0\}) \simeq S^{n-1}$ und wie bereits gezeigt $U_0 \simeq X$, also $\pi_1(U_0 \cap U_1) \cong \pi_1(S^{n-1})$ und $\pi_1(U_0) \cong \pi_1(X)$. Um daraus wirklich $\pi_1(Y)$ bestimmen zu können, müssen wir aber auch die Homomorphismen besser beschreiben.

Dazu legen wir zunächst Basispunkte fest. Wir schreiben $1 = (1, 0, \dots, 0)$ für den Basispunkt von S^{n-1} und setzen $x_0 := f(1) \in X$, $y_0 := j(x_0) \in Y$. Außerdem wählen wir ein $y_0' \in U_0 \cap U_1$ mit $r(y_0) = x_0$, wobei wir hier die Bezeichnungen aus Proposition 18.2 beibehalten. Außerdem definieren wir eine Abbildung $r'\colon U_0 \cap U_1$ durch Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
D^n \setminus (S^{n-1} \cup \{0\}) \arrow[r, "x \mapsto \chi(x)", "\approx"'] \arrow[d, "x \mapsto \frac{x}{\|x\|}"', "\simeq"] & U_0 \cap U_1 \arrow[dl, "r'"] \\
S^{n-1}. &
\end{tikzcd}$$

r' ist eine Homotopieäquivalenz und $r|_{U_0 \cap U_1} = f \circ r'$. Außerdem haben wir bereits festgestellt, dass H eine Homotopieäquivalenz zwischen der Komposition $U_0 \xrightarrow{r} X \xrightarrow{j} Y$ und der Inklusion $U_0 \to Y$ ist. Wie in Proposition 14.13 sei p der Weg, den y_0' während dieser Homotopie durchläuft; das ist der ‚direkte' Weg von y_0 nach y_0'. All dies liefert uns ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^{n-1}, 1) \arrow[r, "f_\#"] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "j_\#"] & \pi_1(Y, y_0) \\
\pi_1(U_0 \cap U_1, y_0') \arrow[r] \arrow[u, "\cong"', "r'_\#"] & \pi_1(U_0, y_0') \arrow[r] \arrow[u, "\cong"', "r_\#"] & \pi_1(Y, y_0'), \arrow[u, "\cong"', "h_p"]
\end{tikzcd}$$

wobei alle nicht beschrifteten Pfeile von Inklusionen induzierte Abbildungen bezeichnen. Aus dem bereits oben über die untere Reihe gezeigten, der Kommutativität des Diagramms und der Tatsache, dass die vertikalen Pfeile Isomorphismen bezeichnen, erhalten wir nun:

18.4. Proposition. *Sei X ein Raum, $n \geq 2$, $f\colon (S^{n-1}, 1) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f D^n$ und $j\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Dann ist $j_\#$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der das Bild von $f_\#$ enthält.* □

Wir benutzen nun noch, dass wir $\pi_1(S^{n-1})$ kennen.

18.5. Proposition. *Sei X ein Raum, $n \geq 3$, $f\colon (S^{n-1}, 1) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f D^n$ und $j\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Dann ist $j_\#$ ein Isomorphismus.* □

18.6. Proposition. *Sei X ein Raum, $f\colon (S^1, 1) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f D^2$ und $j\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Ist $e \in \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger, dann ist $j_\#$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der $f_\#(e)$ enthält.* □

18.7. Bemerkung. Ist $h\colon I/\{0,1\} \to S^1$ ein Homöomorphismus mit $h([\{0,1\}]) = 1$ und $q\colon I \to I/\{0,1\}$ die Quotientenabbildung, so ist $e := [h \circ q]$ ein Erzeuger von $\pi_1(S^1, 1)$. Ist nun (X, x_0) ein Raum mit Basispunkt und $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, $\alpha = [w]$, so definiert, da $w(0) = w(1)$, $f \circ h \circ q = w$ eine Abbildung $f\colon (S^1, 1) \to (X, x_0)$, und es ist $f_\#(e) = \alpha$. Durch Ankleben einer 2-Zelle an X mit Hilfe von f (also entlang w) kann man also das Element α gezielt ‚abschießen'.

Projektive Räume

In Aufgabe 18 haben wir gesehen, dass man die reell-projektiven Räume $\mathbb{R}P^n$ durch sukzessives Ankleben von Zellen aus dem einpunktigen Raum erhalten kann. Wir wollen nun sehen, wie man daraus mit Hilfe des eben gezeigten die Fundamentalgruppen dieser Räume bestimmen kann.

Sei $p_n\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ die Projektion, die sich aus der Definition von $\mathbb{R}P^n$ als Quotient von S^n, bei dem gegenüberliegende Punkte identifiziert werden, ergibt. In Aufgabe 18 wurde gezeigt, dass $\mathbb{R}P^n \approx \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{p_{n-1}} D^n$. Wir bemerken an dieser Stelle, dass man diesen Homöomorphismus so erhält, dass

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[rr, "\text{Inklusion}"] \arrow[d, "p_{n-1}"] & & S^n \arrow[d, "p_n"] \\ \mathbb{R}P^{n-1} \arrow[r, "j^{n-1}"] & \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{p_{n-1}} D^n \arrow[r, "\approx"] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei j^{n-1} die kanonische Inklusion bezeichne. Wir nehmen an, dass die Homöomorphismen so gewählt sind und bestimmen Basispunkte $x_n \in \mathbb{R}P^n$ durch $x_{n+1} = j^n(x_n)$.

Es ist $\mathbb{R}P^0$ ein einpunktiger Raum, also $\pi_1(\mathbb{R}P^0, x_0) \cong 0$. Es ist $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$, also $\pi_1(\mathbb{R}P^1, x_1) \cong \mathbb{Z}$. Einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}P^1$ und S^1 kann man zum Beispiel zu beschreiben: Die stetige Abbildung $\mathrm{sqr}\colon S^1 \to S^1$, $\mathrm{sqr}(z) := z^2$, ist surjektiv, also eine Quotientenabbildung, da S^1 kompakt ist. Da nun $\mathrm{sqr}(x) = \mathrm{sqr}(y) \iff (x = y) \vee (x = -y)$ gibt es einen Homöomorphismus $h\colon \mathbb{R}P^1 \to S^1$, so dass $h \circ p_n = \mathrm{sqr}$. Da wir uns in Proposition 16.5 bereits überlegt haben, dass die Abbildung sqr vom Grad 2 ist, kann man also Isomorphismen so wählen, dass

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1, 1) \arrow[r, "(p_1)_\#"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(\mathbb{R}P^1, x_1) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Aus Proposition 18.6 angewandt auf $\mathbb{R}P^1 \cup_{p_1} D^2$ ergibt sich also $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}_2$. Mit Proposition 18.5 folgt nun induktiv $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_n) \cong \mathbb{Z}_2$ für alle $n \geq 2$. Zusammenfassend und etwas genauer:

18.8. Proposition. *Es ist*

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \mathbb{Z}, & n = 1, \\ \mathbb{Z}_2, & n \geq 2. \end{cases}$$

Die von der Inklusion induzierte Abbildung $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \to \pi_1(\mathbb{R}P^{n+1})$ ist ein Epimorphismus für $n = 1$ und ein Isomorphismus für $n \geq 2$. □