Lieferung 19

Eine kuriose Eigenschaft von Drehungen im dreidimensionalen Raum

Wir werden ein Gedankenexperiment (das man auch problemlos real durchführen kann) betrachten, das einen vielleicht unerwarteten Effekt zeigt. Wir werden diesen mit der Existenz eines Elements der Ordnung 2 in $\pi_1(\mathbb{R}P^3)$ in Verbindung bringen und die Gelegenheit nutzen, um etwas über die Topologie von Matrixgruppen zu lernen.

Das Experiment

Wir stellen uns vor, ein Gegenstand befinde sich in einem Raum und sei mit einem dicken Gummiseil an der Decke des Raumes befestigt. Drehen wir den Gegenstand einmal um sich selbst herum, so wird das Gummiseil in sich verdreht sein. Halten wir nun den Gegenstand (und die Zimmerdecke) fest, so wird es nicht möglich sein, das Gummiseil zu entdrehen, auch nicht, wenn wir es dabei um den Gegenstand herumführen dürfen. Diese wenig überraschende Tatsache werden wir beweisen. Dreht man nun den Gegenstand ein weiteres mal in die selbe Richtung um die selbe Achse, so gibt es danach eine Möglichkeit unter Festhalten des Gegenstandes das Gummiseil (es können auch viele Seile sein) zu entdrehen. Warum und wie das möglich ist, werden wir beschreiben.

Modellierung

Wir nehmen an, dass wir auf dem Seil längs drei Linien angebracht haben. Für jede Position des Seils erhalten wir nun durch Betrachten der Position der Linien drei Wege $l_1, l_2, l_3 \colon I \to \mathbb{R}^3$. (Wir haben den Raum mit einer Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ identifiziert.) Dabei seien $l_1(0), l_2(0), l_3(0)$ die Positionen der Linien an dem an der Decke befestigten Seilende. Diese sind also unabhängig von der Seilposition. Wir nehmen an, dass die angebrachten Linien und die

Beschaffenheit des Seils so sind, dass für alle Seilpositionen und alle $s \in I$ die Vektoren $l_2(s) - l_1(s)$ und $l_3(s) - l_1(s)$ linear unabhängig sind. Es gibt dann immer einen eindeutig bestimmten Vektor $v(s)$ der Länge 1, der Senkrecht auf $l_2(s)-l_1(s)$ und $l_3(s)-l_1(s)$ steht, so dass $(l_2(s)-l_1(s), l_3(s)-l_1(s), v(s))$ positiv orientiert ist. Dies wiederum definiert eine Matrix $G(s) \in \mathrm{GL}(3)$ mit $(l_2(s) - l_1(s), l_3(s) - l_1(s), v(s)) = G(s) \cdot (l_2(0) - l_1(0), l_3(0) - l_1(0), v(0))$. Eine Bewegung des Seils, wobei die Zeit durch I parametrisiert sei, definiert nun eine stetige Funktion (auf die Topologie von $\mathrm{GL}(3)$ werden wir noch zu sprechen kommen) $H\colon I \times I \to \mathrm{GL}(3)$ durch $H(s,t) = G_{\text{Seilposition zur Zeit } t}(s)$.

Im Inneren des Gegenstandes, an dem das Seil befestigt ist, denken wir uns einen Punkt ausgezeichnet, den wir bei allen Bewegungen des Gegenstandes festhalten. Dann definiert eine Bewegung des Gegenstandes einen Weg $w\colon I \to \mathrm{SO}(3)$ durch

$$\text{Stellung des Gegenstandes zum Zeitpunkt } t = w(t) \cdot \text{Standardstellung}.$$

Die Standardstellung sei die zum Beginn unseres Experiments.

19.1. Proposition. *Führen wir am Anfang des Experiments eine Bewegung des Gegenstandes durch, die durch $w\colon I \to \mathrm{SO}(3)$ beschrieben wird, und beschreibt $G_{EP}\colon I \to \mathrm{GL}(3)$ die Position des Seil nach der Bewegung, so ist $w \simeq G_{EP} \text{ rel } \{0,1\}$ in $\mathrm{GL}(3)$.*

Beweis. Während der Bewegung des Gegenstandes bewegt sich auch das Seil, dessen Bewegung sei wie oben durch $H\colon I \times I \to \mathrm{GL}(3)$ beschrieben. Es ist dann $H(0, \bullet) = c_1$, wobei 1 die Einheitsmatrix bezeichne, da das eine Seilende an der Decke befestigt ist und nicht bewegt wird. Es ist $H(1, \bullet) = w$, da das andere Seilende an dem Gegenstand befestigt ist und mit diesem bewegt wird. Außerdem ist $H(\bullet, 0) = c_1$, da dies die Ausgangslage des Seils beschreibt und $H(\bullet, 1) = G_{EP}$. Es folgt $c_1 * w \simeq c_1 * G_{EP} \text{ rel } \{0,1\}$ und damit $w \simeq G_{EP} \text{ rel } \{0,1\}$. □

19.2. Korollar. *Führen wir am Anfang des Experiments eine Bewegung des Gegenstandes durch, die durch $w\colon I \to \mathrm{SO}(3)$ beschrieben wird, und ist es danach bei festgehaltenem Gegenstand möglich, das Seil in die Ausgangslage zurückzubringen, so ist $[w] = 1 \in \pi_1(\mathrm{GL}(3), 1)$.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass $w(1) = 1$ gelten muss, da nur dann das an dem Gegenstand befestigte Ende des Seils in die Ausgangslage zurückgebracht werden kann. Wir fassen nun die Bewegung des Seils, bei der sich der Gegenstand wie durch w beschrieben bewegt und die anschließende Bewegung des Seils, bei der sich der Gegenstand nicht bewegt als eine Bewegung des Seils auf, bei der sich der Gegenstand wie durch $w * c_1$ beschrieben bewegt. Die Proposition darauf angewandt liefert $[w] = [w * c_1] = [c_1] = 1$. □

Um weitere Fortschritte zu erzielen, müssen wir also $\pi(\mathrm{GL}(3), 1)$ näher untersuchen.

Ein wenig über Matrixgruppen

Es sei $\mathrm{Mat}(n)$ die Gruppe der (reellen) $n \times n$-Matrizen. Via der Einträge identifizieren wir $\mathrm{Mat}(n)$ mit R^{n^2} und geben $\mathrm{Mat}(n)$ dadurch eine Topologie. Wir betrachten weiterhin die Unterräume $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n) \subset \mathrm{Mat}(n)$.

Zunächst ein paar einfache Bemerkungen.

19.3. Proposition. $\mathrm{GL}(n)$ *ist in* $\mathrm{Mat}(n)$ *offen.*

Beweis. Die Abbildung $\det\colon \mathrm{Mat}(n) \to \mathbb{R}$ ist stetig, da ein Polynom in den Einträgen, und $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n)\colon \det A \neq 0\}$. □

19.4. Proposition. *Der von der Inklusion induzierte Homomorphismus* $\pi_1(\mathrm{O}(n), 1) \to \pi_1(\mathrm{GL}(n), 1)$ *ist ein Monomorphismus.*

Beweis. Bezeichnet $i\colon \mathrm{O}(n) \to \mathrm{GL}(n)$ die Inklusion, so liefert das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren eine stetige Abbildung $s\colon \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{O}(n)$ mit $s \circ i = \mathrm{id}$. Es folgt $s_\# \circ i_\# = (s \circ i)_\# = \mathrm{id}_\# = \mathrm{id}$, also ist $i_\#$ ein Monomorphismus. □

19.5. Bemerkung. In der Tat ist auch $i \circ r \simeq \mathrm{id}$, also $i_\#$ ein Isomorphismus.

19.6. Proposition. $\mathrm{SO}(n)$ *enthält die Wegzusammenhangskomponente von* $\mathrm{O}(n)$*, die die Einheitsmatrix enthält.*

Beweis. Es ist $\det\colon \mathrm{O}(n) \to \{-1, 1\}$ stetig und $\det 1 = 1$, also $\det A = 1$ für alle A aus der Wegzusammenhangskomponente, die die 1 enthält. □

19.7. Bemerkung. In der Tat ist $\mathrm{SO}(n)$ wegzusammenhängend also gleich der Wegzusammenhangskomponente von $\mathrm{O}(n)$, die die Einheitsmatrix enthält.

19.8. Korollar. *Der von der Inklusion induzierte Homomorphismus* $\pi_1(\mathrm{SO}(n), 1) \to \pi_1(\mathrm{O}(n), 1)$ *ist ein Isomorphismus.* □

Wir haben gesehen, dass es, um $\pi_1(\mathrm{GL}(n), 1)$ zu verstehen, genügt, sich $\pi_1(\mathrm{SO}(n), 1)$ anzuschauen. Nun werden wir uns eine genauere Beschreibung des Raumes $\mathrm{SO}(3)$ verschaffen.

Über SO(3)

Mit Mitteln der linearen Algebra erhält man die folgende Klassifizierung von Matrizen aus $\mathrm{SO}(3)$:

19.9. Proposition. *Ist* $M \in \mathrm{SO}(3)$*, so existieren* $A \in \mathrm{SO}(3)$ *und* $\phi \in [0, \pi]$*, so dass*

$$M = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} A^t.$$

Ist M so durch A und ϕ gegeben und N entsprechend durch B und ψ und haben A und B Spaltendarstellungen $A = (v, v', v'')$, $B = (w, w', w'')$, so gilt:

(i) Ist $\phi = 0$, so ist $M = N \iff \psi = 0$.

(ii) Ist $0 < \phi < \pi$, so ist $M = N \iff (\phi = \psi) \wedge (v = w)$.

(iii) Ist $\phi = \pi$, so ist $M = N \iff (\psi = \pi) \wedge ((v = w) \vee (v = -w))$.

□

Für die Beschreibung von SO(3), auf die wir abzielen, müssen wir uns nur noch um Stetigkeit kümmern.

19.10. Definition und Proposition. *Es gibt eine stetige Abbildung $\Phi\colon S^2 \times [0, \pi] \to \mathrm{SO}(3)$, so dass für alle $v \in S^2$, $\phi \in [0, \pi]$ Vektoren v', v'' existieren, so dass mit $A = (v, v', v'')$ gilt, dass $A \in \mathrm{SO}(3)$ und*

$$\Phi(v, \phi) = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} A^t.$$

Beweis. Wegen Proposition 19.9 ist Φ bereits eindeutig definiert, wir müssen nur noch die Stetigkeit nachprüfen. Dies tun wir lokal bei (v, ϕ). Seien $v', v'' \in \mathbb{R}^3$, so dass $(v, v', v'') \in \mathrm{SO}(3)$. Für $u \in \mathbb{R}^3$ setzen wir $A(u) := (u, v', v'')$. Da GL(3) offen in Mat(3) ist, existiert eine Umgebung U von u, so dass $A(u) \in \mathrm{GL}(3)$ für alle $u \in U$. Sei nun $s\colon \mathrm{GL}(3) \to \mathrm{O}(3)$ die Schmidtsche Orthonormalisierungsabbildung. Wählt man U klein genug, so ist $s[A[U]] \subset \mathrm{SO}(3)$ (wieder Stetigkeit der Determinantenfunktion). Es folgt, dass für alle $(u, \psi) \in U \times [0, \pi]$ gilt, dass

$$\Phi(u, \psi) = s(A(u)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} s(A(u))^t.$$

Damit ist Φ in einer Umgebung von (v, ϕ) stetig. □

19.11. Bemerkung. $\Phi(v, \phi)$ ist natürlich gerade eine Drehung um die (gerichtete) Achse v um den Winkel ϕ.

19.12. Proposition. *Identifizieren wir wie in Proposition 6.12 $\mathbb{R}P^3$ mit $D^3/\sim$, wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die gegenüberliegende Punkte in S^2 identifiziert, so induziert Φ einen Homöomorphismus*

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}\colon \mathbb{R}P^3 &\to \mathrm{SO}(3) \\ [rv] &\mapsto \Phi(v, r\pi), \qquad v \in S^2, r \in I. \end{aligned}$$

Beweis. Ist $q\colon D^3 \to \mathbb{R}P^3$ die Quotientenabbildung, so betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^2 \times [0,\pi] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "(v,\phi)\mapsto v\cdot\frac{\phi}{\pi}"'] & \mathrm{SO}(3) \\
D^3 \arrow[d, "q"'] \arrow[ur, phantom, "\approx"] & \\
\mathbb{R}P^3 . \arrow[uur, "\bar\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Die Existenz einer Abbildung $\bar\Phi$, die das Diagramm kommutativ macht, sowie deren Bijektivität folgt aus Proposition 19.9. Aus der Kompaktheit von $S^2 \times [0,\pi]$ und der Tatsache, dass D^3 und $\mathrm{SO}(3)$ hausdorffsch sind, folgt, dass sowohl Φ als auch die Komposition der durch die vertikalen Pfeile bezeichneten Abbildungen Quotientenabbildungen sind. Daraus folgt, dass $\bar\Phi$ ein Homöomorphismus ist. $\square$

Wir wissen nun also nach Proposition 18.8, dass $\pi_1(\mathrm{SO}(3),1) \cong \mathbb{Z}_2$. Wir wollen noch das nicht-triviale Element von $\pi_1(\mathrm{SO}(3),1)$ beschreiben.

19.13. Proposition. *Ist $v \in S^2$, so ist*

$$\begin{aligned} I &\to \mathrm{SO}(3) \\ s &\mapsto \begin{cases} \Phi(v, 2\pi s), & s \le \frac{1}{2}, \\ \Phi(-v, 2\pi(1-s)), & s \ge \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

ein stetiger Weg, der das nicht-triviale Element von $\pi_1(\mathrm{SO}(3),1)$ repräsentiert. Insbesondere wird dieses Element auch von

$$\begin{aligned} I &\to \mathrm{SO}(3) \\ s &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi s) & -\sin(2\pi s) \\ 0 & \sin(2\pi s) & \cos(2\pi s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

repräsentiert.

Beweis. Zunächst ist klar, dass die erste Aussage unabhängig von der Wahl von v ist, wir nehmen daher $v = (1,0,0)$ an. Durch Einsetzen in die Definition von Φ erhält man daraus dann sofort die zweite Aussage.

Wir haben nun zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} I &\to D^3/\sim \\ s &\mapsto \begin{cases} [(2s,0,0)], & s \le \frac{1}{2}, \\ [(2(1-s),0,0)], & s \ge \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

das nicht-triviale Element aus $\pi_1(\mathbb{R}P^3)$ repräsentiert. Identifizieren wir $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$, so verläuft dieser Weg ganz in $D^1/\{-1,1\} \approx \mathbb{R}P^1 \approx S^1$ und repräsentiert dort offenbar einen Erzeuger der Fundamentalgruppe. Der Rest folgt aus Proposition 18.8. $\square$

Zurück zum Experiment

Wir wissen nun:

19.14. Proposition. *Drehen wir den Gegenstand zu Beginn des Experiments einmal um eine beliebige Achse, so ist es danach nicht möglich, bei festgehaltenem Gegenstand das Seil zu entdrehen.*

Beweis. Das folgt aus Korollar 19.2 und Proposition 19.13. $\square$

Um nun auch noch zu zeigen, dass man nach einer Bewegung des Gegenstands, die durch einen zum konstanten Weg homotopen Weg in SO(3) beschrieben wird, das Seil entdrehen kann, beschreiben wir zunächst, wie man aus einem Weg in SO(3) eine Seilposition erhält. Die Postionen, die wir erhalten, werden derart sein, dass jedes Seilstück den gleichen Abstand zu dem Gegenstand hat wie in der Ausgangsposition. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass wir den Raum so mit dem $\mathbb{R}^3$ identifiziert haben, dass sich der Ursprung im Mittelpunkt des Gegenstandes befindet, von dem wir annehmen, dass er eine Kugel mit Radius 1 ist. Außerdem nehmen wir an, dass das nicht an der Kugel befestigte Ende des Seils im Abstand 2 vom Ursprung befestigt ist. Ein Weg $w\colon I \to \mathrm{SO}(3)$ definiert einen Homöomorphismus

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto \begin{cases} w(0)\cdot x, & \|x\| \geq 2, \\ w(2-\|x\|)\cdot x, & 1 \leq \|x\| \leq 2, \\ w(1)\cdot x, & \|x\| \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

und damit einen Zustand unseres Systems, in dem der Teil des Gegenstandes oder Seiles, das sich im Anfangszustand am Ort x befindet, am Ort $h(x)$ befindet. Es ist klar, dass sich das problemlos auch auf mehrere Gummiseile verallgemeinert.

19.15. Proposition. *Ist $w\colon I \to \mathrm{SO}(3)$ ein stetiger geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt 1 und ist $[w] = 1 \in \pi_1(\mathrm{SO}(3), 1)$ das triviale Element, so ist es möglich, den Gegenstand wie durch w beschrieben zu bewegen, dabei das Seil mitzubewegen und anschließend bei festgehaltenem Gegenstand das Seil zu entdrehen.*

Beweis. Sei $H\colon I \to \mathrm{SO}(3)$ eine Homotopie relativ zu $\{0,1\}$ zwischen w und dem konstanten Weg c_1. Wir betrachten nun die Funktion

$$\begin{aligned} Z\colon I \times [0,2] &\to \mathrm{SO}(3) \\ (s,t) &\mapsto \begin{cases} 1, & t \leq 1-s, \\ w(t+s-1), & 1-s \leq t \leq 1, \\ H(s,t-1), & t \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Z ist stetig. Es beschreibe nun $Z(\bullet,t)$ wie vor dieser Proposition ausgeführt den Zustand des Systems zum Zeitpunkt t. Es ist $Z(\bullet,0) = Z(\bullet,2) = c_1$, so dass am Anfang und am Ende des Vorgangs der Zustand des Systems der selbe ist. Es ist $Z(0,t) = 1$ für alle t, so dass das nicht am Gegenstand befindliche Seilende über den gesamten Zeitraum unbewegt bleibt. Es ist $Z(1,t) = w(t)$ für $t \leq 1$ und $Z(1,t) = 1$ für $t \geq 1$, so dass das Objekt zunächst die durch w vorgeschriebene Bewegung vollführt und danach unbewegt bleibt. □

19.16. Korollar. *Es ist möglich, den Gegenstand zunächst zweimal vollständig um eine beliebige Achse zu drehen und danach bei festgehaltenem Gegenstand das Seil zu entdrehen.*

Beweis. Es sei $w\colon I \to \mathrm{SO}(3)$ ein Weg, der einmaliges Drehen um eine Achse beschreibt. w ist eine Schleife bei 1, repräsentiert also ein Element aus $\pi_1(\mathrm{SO}(3),1)$. Nun beschreibt $w * w$ zweimaliges Drehen um diese Achse, aber $[w*w] = [w]^2 = 1$, denn $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^3)$ hat Ordnung 2. □

19.17. Bemerkung. Ist die Achse, um die gedreht wird, die, auf der das Seil liegt, so ist in der Konstruktion aus dem Beweis von Proposition 19.15 die Stellung des Seils nach dem Drehen des Gegenstandes so, wie man sich das vorstellt. Es ist nun empfehlenswert, konkret eine Homotopie herzunehmen, die zeigt, dass zweimaliges Drehen das triviale Element aus $\pi_1(\mathrm{SO}(3))$ repräsentiert, und die dadurch beschriebene Entdrehungsbewegung zu visualisieren.