Lieferung 2

Topologische Räume

Die Kategorie topologischer Räume

Wir haben gesehen, dass es, wenn man Räume — das waren bisher metrische Räume — bis auf Homöomorphie betrachtet nur auf die offenen Mengen ankommt und haben angekündigt, die Eigenschaften aus Proposition 1.17 zu Axiomen zu machen. Das geschieht nun.

2.1. Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{T}$ der Potenzmenge von X, so dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für alle $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$ ist $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{T}$.

(ii) Sind $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcap_{k=1}^{n} O_k \in \mathcal{T}$.

Eine Teilmenge von X heißt *offen*, wenn sie in $\mathcal{T}$ enthalten ist. Ein *topologischer Raum* ist eine Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{T}$ auf ihr.

2.2. Bemerkung. Häufig fordert man auch noch $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$, aber das ist in obigem bereits enthalten: Es ist $\emptyset \subset \mathcal{T}$ und $\bigcup \emptyset = \emptyset$, außerdem $0 \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{k=1}^{0} O_k = \bigcap \emptyset = X$.

Wie auch schon bei metrischen Räumen werden wir den topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ nur mit X bezeichnen, wenn keine Verwechslungsmöglichkeit besteht.

Eine der Eigenschaften, die wir in Proposition 1.17 festgestellt haben, fehlt noch.

2.3. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *hausdorffsch* und damit ein *Hausdorff-Raum* oder auch *T_2-Raum*, wenn zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$, Mengen $O_0, O_1 \in \mathcal{T}$ mit $x_i \in O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$ existieren.

Das T in T_2 kommt daher, dass es sich um eine Trennungseigenschaft handelt: Je zwei verschiedene Punkte können durch offene Mengen getrennt werden. Die 2 in T_2 verspricht, dass es derer noch mehr gibt.

Die nächste Definition ist durch Proposition 1.15 motiviert.

2.4. Definition. Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine *stetige Abbildung* $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist eine Funktion $f\colon X \to Y$, so dass $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X$ für alle $O \in \mathcal{T}_Y$.

Trivial, aber so wichtig, dass wir es notieren:

2.5. Proposition. *Ist X ein topologischer Raum, so ist die Identität id_X eine stetige Abbildung. Sind X, Y, Z topologische Räume und $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen, so ist die Komposition $g \circ f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung.*

Beweis. Es ist $\mathrm{id}^{-1}[O] = O$ und $(g \circ f)^{-1}[O] = f^{-1}\left[g^{-1}[O]\right]$. □

Und schließlich wiederholen wir in diesem neuen Kontext die Definition der Homöomorphie.

2.6. Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ein *Homöomorphismus*, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Zwei Räume X und Y heißen *homöomorph*, $X \approx Y$, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Homöomorphie war bei metrischen Räumen nur eine von mehreren sinnvollen Äquivalenzrelationen, und eine recht schwache noch dazu, das heißt eine, die einiges an Information ignorierte. Bei topologischen Räumen hingegen ist Homöomorphie eine sehr natürliche Äquivalenzrelation, in gewisser Weise die stärkstmögliche sinnvolle Äquivalenzrelation. Insbesondere ist, wenn $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf derselben Menge X sind, die Funktion

$$\begin{aligned} i\colon (X, \mathcal{T}_1) &\to (X, \mathcal{T}_2) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

genau dann ein Homöomorphismus, wenn $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Nun ist es aber Zeit für ein paar Beispiele. Eigentlich jedoch war der letzte Teil schon voll von ihnen:

2.7. Beispiel und Definition. Ist X eine Menge und d eine Metrik auf X, so bilden die bezüglich d offen Teilmengen von X eine Topologie auf X, die *von der Metrik d induzierte Topologie*. Diese Topologie ist hausdorffsch. Ist Y ein weiterer metrischer Raum, so ist eine Funktion $f\colon X \to Y$ genau dann stetig als Abbildung zwischen metrischen Räumen, wenn sie es als Abbildung zwischen den induzierten topologischen Räumen ist.

2.8. Beispiele und Definitionen. Ist X eine Menge, so ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ selbst eine Topologie, die *diskrete Topologie*. Wir haben bereits in Beispiel 1.14 gesehen, dass sie von der diskreten Metrik induziert wird.

$\{\emptyset, X\}$ ist ebenfalls eine Topologie auf X, sie wird manchmal die *indiskrete Topologie* oder auch anschaulicher die *Klumpentopologie* genannt. Hat X mindestens zwei Elemente, so ist sie nicht hausdorffsch, also gibt es keine Metrik, die diese Topologie induzieren würde.

Wir werden später auch Hausdorff-Räume kennenlernen, die von keiner Metrik induziert werden. Überhaupt kann man sich fragen, wie die topologischen Räume charakterisiert werden können, die von einer Metrik induziert werden, die also, wie man sagt, *metrisierbar* sind. Vielleicht werden wir uns dieser Frage später genauer zuwenden. In jedem Fall werden wir noch notwendige Kriterien finden.

2.9. Beispiel. Ist X eine beliebige Menge, so bilden all die Teilmengen von X, deren Komplemente endlich sind zusammen mit der leeren Menge eine Topologie auf X (Nachrechnen!), die *kofinite Topologie*.

Ist X unendlich, so ist auch die kofinite Topologie auf X nicht hausdorffsch. Nun scheint das wieder eine sehr „komische“, nur zum Konstruieren von Gegenbeispielen geeignete Topologie zu sein. Das täuscht aber, denn in der Tat geben algebraische Geometer gerne der eindimensionalen Linie diese Topologie.[1] Wir tun also gut daran, nicht nur Hausdorff-Räume zu betrachten.

Mehr Mengen

Wir definieren nun für Teilmengen topologischer Räume ein paar Eigenschaften und Operationen, die zumindest für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ schon aus der Analysis-Grundvorlesung bekannt sein sollten.

2.10. Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge von X heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist.

Da Schnitte von Komplementen Komplemente von Vereinigungen und umgekehrt sind, folgt sofort aus der Definition einen topologischen Raumes.

2.11. Proposition. *Sei X ein topologischer Raum, dann gilt:*

(i) Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

(ii) Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Ist X eine Menge, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, und ist die Menge $\{A \subset X : X - A \in \mathcal{T}\}$ abgeschlossen gegenüber beliebigen Schnitten und endlichen Vereinigungen, so ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. □

[1] Dies ist ein sehr spezieller Fall der Zariski-Topologie.

Eine Topologie kann also genau so gut wie durch Angabe der offenen Mengen durch Angabe der abgeschlossenen Mengen definiert werden.

2.12. Beispiel. In einem mit der kofiniten Topologie versehenen Raum ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie endlich oder gleich dem ganzen Raum ist. Dass dies eine Topologie ist, liegt also im wesentlichen daran, dass Schnitte endlicher Mengen eindlich sind und ebenso endliche Vereinigungen endlicher Mengen.

Was wir in Bemerkung 1.13 für Umgebungen in metrischen Räumen festgestellt haben, machen wir wieder zur Definition.

2.13. Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x, wenn eine offene Menge O existiert, so dass $x \in O \subset U$.

2.14. Definitionen und Propositionen. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$.

$$\operatorname{int} A := \bigcup \{U \subset A \colon U \text{ offen}\}$$

ist die größte in A enthaltene offene Menge und heißt das *Innere* von A.

$$\overline{A} := \bigcap \{C \subset X \colon A \subset C, C \text{ abgeschlossen}\}$$

ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält und heißt der *Abschluss* von A.

$$\partial A := \overline{A} - \operatorname{int} A$$

heißt der *Rand* von A.

Ein Punkt $x \in X$ heißt *innerer Punkt* von A, wenn $x \in \operatorname{int} A$, *Berührpunkt* von A, wenn $x \in \overline{A}$ und *Randpunkt* von A, wenn $x \in \partial A$.

An dieser Stelle sei es den StudentInnen ans Herz gelegt, die verschiedenen ihnen bereits bekannten Charakterisierungen und Eigenschaften dieser Begriffe aus diesen Definitionen herzuleiten.

2.15. Definitionen. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *dicht*, wenn $\overline{A} = X$, *nirgends dicht*, wenn $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$.

Mehr Stetigkeit

Wir haben Stetigkeit bisher nur global definiert. Von metrischen Räumen her kennen wir auch den lokalen Begriff der Stetigkeit in einem Punkt.

2.16. Definition. Seien X, Y topologische Räume, $x \in X$ und $f \colon X \to Y$ eine Funktion. f heißt *stetig in* x, wenn für jede Umgebung U von $f(x)$ das Urbild $f^{-1}[U]$ eine Umgebung von x ist.

Wir bemerken:

2.17. Proposition. *Eine Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist.* ☐

Eine einfache Umformulierung der Definition ist

2.18. Proposition. *Eine Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist in $x \in X$ genau dann stetig, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x gibt, so dass $f[U] \subset V$.*

Beweis. Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Ist f in x stetig, so ist $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x, und es ist $f\left[f^{-1}[V]\right] \subset V$. Existiert andererseits eine Umgebung U von x mit $f[U] \subset V$, so ist $U \subset f^{-1}[V]$ und auch $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x. ☐

Für metrische Räume stimmen diese Definitionen mit denen überein, die wir bereits hatten.

2.19. Proposition. *Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $x \in X$ und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Seien außerdem $\mathcal{T}_{d_X}$ und $\mathcal{T}_{d_Y}$ die von den Metriken induzierten Topologien. Dann sind äquivalent:*

(i) $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ *ist stetig in* x.

(ii) $f\colon (X, \mathcal{T}_{d_X}) \to (Y, \mathcal{T}_{d_Y})$ *ist stetig in* x.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. Nun existiert ein $\delta > 0$, so dass $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset V$.

„$\Leftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von x, so dass $f[U] \subset B_\varepsilon(f(x))$. Nun gibt es wiederum ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$, also $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x))$. ☐

Wir schauen uns den Beweis noch einmal an: Die ε-δ-Definition der Stetigkeit ist fast genau die Beschreibung in Proposition 2.18, nur dass sie nur ε-Umgebungen anstelle beliebiger zulässt. Da es aber genügend viele ε-Umgebungen gibt, macht das keinen Unterschied. Wir formalisieren nun dieses „genügend viele“.

2.20. Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine *Umgebungsbasis von x* ist eine Menge $\mathcal{B}$ von Umgebungen von x, so dass es zu jeder Umgebung U von x ein $V \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $V \subset U$.

Was wir also soeben die folgende Tatsache benutzt.

2.21. Proposition. *Ist X ein metrischer Raum und $x \in X$, so ist die Menge $\{B_\varepsilon(x)\colon \varepsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis von x.* ☐

Und eigentlich haben wir das folgende gezeigt.

2.22. Proposition. *Es seien X, Y topologische Räume, $x \in X$, $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Sei außerdem $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x, $\mathcal{B}'$ eine Umgebungsbasis von $f(x)$. Dann ist f in x genau dann stetig, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{B}'$ ein $U \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $f[U] \subset V$.* □

Das ist typisch: Anstatt eine Eigenschaft für alle Umgebungen eines Punktes nachzuprüfen, genügt es häufig, dies nur für alle Elemente einer Umgebungsbasis zu tun.

Man lasse sich nicht von dem Wort Umgebungs*basis* verwirren. Vergleicht man die Situation mit Vektorräumen, so entspricht das eher einem Erzeugendensystem. Zum Beispiel ist ja immer die Menge aller Umgebungen eines Punktes eine Umgebungsbasis.

Unterräume und das Produkt zweier Räume

Eine Teilmenge eines topologischen Raumes wird auf natürliche Art selbst zu einem topologischen Raum.

2.23. Definition und Proposition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist $\{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf Y, die *Unterraumtopologie*. Y versehen mit der Unterraumtopologie heißt ein *Unterraum* von X.

Die Unterraumtopologie ist gerade so gemacht, dass die Inklusionsabbildung stetig wird. Um das besser formulieren zu können, führen wir zwei Begriffe ein.

2.24. Definition. Seien X eine Menge und $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X. $\mathcal{T}_1$ heißt *gröber* als $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_2$ *feiner* als $\mathcal{T}_1$, wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

2.25. Proposition. *Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so ist die Unterraumtopologie die gröbste Topologie auf Y, so dass die Inklusionsabbildung $i\colon Y \to X$ stetig ist.* □

Wir notieren noch eine weitere einfache aber wichtige Eigenschaft.

2.26. Proposition. *Seien X, Z topologische Räume, $Y \subset X$ mit der Unterraumtopologie versehen und $i\colon Y \to X$ die Inklusion. Eine Funktion $f\colon Z \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $i \circ f$ stetig ist.*

Beweis. Ist f stetig, so auch $i \circ f$, da i stetig ist. Sei nun $i \circ f$ stetig und $U \subset Y$ offen. Dann gibt es eine offene Menge $O \subset X$ mit $U = O \cap Y$, also $U = i^{-1}[O]$. Es folgt, dass $f^{-1}[U] = f^{-1}[i^{-1}[O]] = (i \circ f)^{-1}[O]$ offen ist. □

Eine weitere wichtige Konstruktion ist das Produkt von Räumen. Wir werden Produkte —auch unendlich vieler Räume— später noch genauer behandeln, daher begnügen wir uns hier mit dem Produkt zweier Räume.

Mengen der Form $U \times V$ sollten für offene U, V offen sein; diese bilden allerdings noch keine Topologie, da die Vereinigung zweier Mengen dieser Form nicht wieder von dieser Form zu sein braucht. Wir müssen also Vereinigungen auch noch hinzunehmen. Wir machen dies nun systematisch.

2.27. Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine *Basis* der Topologie $\mathcal{T}$ ist eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, so dass jede offene Menge Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist, so dass also $\mathcal{T} = \{\bigcup M : M \subset \mathcal{B}\}$ gilt.

Da eine Basis offenbar die Topologie bestimmt, kann man die Topologie beschreiben, indem man eine Basis angibt. Dabei ist es hilfreich, zu wissen, wann eine gegebene Familie von Teilmengen Basis einer Topologie ist.

2.28. Proposition. *Sei X eine Menge, und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Ist $\mathcal{B}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten, so ist $\{\bigcup M : M \subset \mathcal{B}\}$ eine Topologie auf X mit Basis $\mathcal{B}$.* □

2.29. Bemerkung. Die Voraussetzung in dieser Proposition kann noch abgeschwächt werden, wir brauchen das aber im Moment nicht.

Wir sind nun bereit, das Produkt zweier topologischer Räume zu definieren.

2.30. Definition. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Die *Produkttopologie* auf $X \times Y$ ist die Topologie mit der Basis

$$\{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

$X \times Y$ versehen mit dieser Topologie heißt das *Produkt* der Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

Wenn nichts anderes gesagt ist, werden wir immer davon ausgehen, dass $X \times Y$ die Produkttopologie trägt. Bevor wir wichtige Eigenschaften von Produkten betrachten, noch ein weiterer Begriff.

2.31. Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine *Subbasis* der Topologie $\mathcal{T}$ ist eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, so dass jede offene Menge Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen von $\mathcal{S}$ ist, so dass also $\{\bigcap_{k=1}^{n} O_k : n \in \mathbb{N}, O_k \in \mathcal{S}\}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ ist.

Wir bemerken kurz:

2.32. Proposition. *Ist X eine Menge, so ist jede Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ eine Subbasis einer Topologie auf X.*

Doch nun weiter:

Beweis. $\{\bigcap_{k=1}^{n} O_k : n \in \mathbb{N}, O_k \in \mathcal{S}\}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen und daher nach Proposition 2.28 die Basis einer Topologie. □

2.33. Proposition. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Dann ist die Menge*

$$\{O \times Y : O \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times O : O \in \mathcal{T}_Y\}$$

eine Subbasis der Produkttopologie auf $X \times Y$. □

2.34. Proposition. *Seien X, Y topologische Räume und*

$$\begin{aligned} p_1 \colon X \times Y &\to X \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} p_2 \colon X \times Y &\to Y \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

die kanonischen Projektionen. Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie auf $X \times Y$, so dass p_1 und p_2 stetig sind.

Beweis. p_1 ist genau dann stetig, wenn $p_1^{-1}[O] = O \times Y$ für alle offenen $O \subset X$ offen ist. Ebenso ist p_2 genau dann stetig, wenn alle $X \times O$, $O \subset Y$ offen, offen sind. Nun ist eine Topologie offenbar genau dann die gröbste, in der diese Mengen offen sind, wenn diese Mengen eine Subbasis von ihr bilden. □

Um Stetigkeit nachzuprüfen, genügt es eine Subbasis zu betrachten:

2.35. Proposition. *Seien X, Y topologische Räume und $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie von Y. Eine Funktion $f \colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}[O]$ für alle $O \in \mathcal{S}$ offen ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ ist klar, denn alle $O \in \mathcal{S}$ sind offen. “$\Leftarrow$„: Sei $U \subset Y$ offen. Dann gibt es eine Indexmenge I, $n_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in I$ und O_{ik} für alle $i \in I, 1 \leq k \leq n_i$, so dass $U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} O_{ik}$. Nun ist $f^{-1}[O_{ik}]$ für alle i, k offen. Damit ist auch

$$f^{-1}[U] = f^{-1}\left[\bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} O_{ik}\right] = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} f^{-1}[O_{ik}]$$

offen. □

2.36. Proposition. *Seien X, Y topologische Räume, dann ist die Produkttopologie die feinste Topologie auf $X \times Y$, so dass für alle topologischen Räume Z und alle stetigen Abbildungen $f \colon Z \to X$ und $g \colon Z \to Y$ die Abbildung*

$$\begin{aligned} (f, g) \colon Z &\to X \times Y \\ z &\mapsto (f(z), g(z)) \end{aligned}$$

stetig ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $X \times Y$ mit der Produkttopologie diese Eigenschaft hat. Dazu genügt es nach Proposition 2.35, Urbilder von Elementen einer Subbasis zu betrachten. Sei daher U ein beliebiges Element der Subbasis aus Proposition 2.33, etwa $O \times Y$ mit $O \subset X$ offen. Nun ist $(f,g)^{-1}[U] = (f,g)^{-1}[O \times Y] = f^{-1}[O]$ offen, da f stetig ist.

Bezeichnen wir nun die Produkttopologie mit $\mathcal{T}$ und nehmen wir an, $\mathcal{T}'$ sei eine weitere Topologie auf $X \times Y$ der Eigenschaft aus der Proposition. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} i\colon (X \times Y, \mathcal{T}) &\to (X \times Y, \mathcal{T}') \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Es ist $i = (p_1, p_2)$ und nach Proposition 2.34 sind p_1 und p_2 stetig. Nach der Vorraussetzung an $\mathcal{T}'$ ist also i stetig. Das heißt aber gerade, dass $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. □

Die Propositionen 2.34 und 2.36 ergeben zusammen eine wichtige Charakterisierung der Produkttopologie.

2.37. Korollar. *Seien X, Y Räume. Die Produkttopologie ist die einzige Topologie auf $X \times Y$, die die folgenden Eigenschaften gleichzeitig erfüllt:*

(i) Die kanonischen Projektionen auf die Faktoren sind stetig.

(ii) Für einen beliebigen Raum Z und stetige Abbildungen $f\colon Z \to X$ und $g\colon Z \to Y$ ist die Abbildung $(f,g)\colon Z \to X \times Y$ stetig.

□