Lieferung 4

Kompaktheit

Kompaktheit

Den Begriff der Kompaktheit muss man wohl für jemanden, der eine Analysisvorlesung gehört hat, nicht weiter motivieren. Für uns ist es nur wichtig, aus den verschiedenen Charakterisierungen, die dort kennengelernt wurden und die für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, die richtige als Definition herauszupicken.

4.1. Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Überdeckung* (von X), wenn $\bigcup \mathcal{C} = X$, *offene Überdeckung*, wenn zusätzlich $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$. Eine Teilmenge einer Überdeckung, die selbst Überdeckung ist, heißt *Teilüberdeckung*.

4.2. Definition. Sei X ein topologischer Raum. X heißt *quasikompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Der Raum X heißt *kompakt*, wenn er quasikompakt und hausdorffsch ist.

Häufig werden quasikompakte Räume schon kompakt genannt, man lasse also beim Literaturstudium Vorsicht walten.

Da schon bekannt sein sollte, wann Unterräume von euklidischen Räumen kompakt sind, heben wir uns diese noch ein wenig auf und begnügen uns mit einem Beispiel, das zeigt, dass Kompaktheit als Verallgemeinerung von Endlichkeit angesehen werden kann.

4.3. Beispiel. Jeder endliche Raum (in der Tat jeder Raum mit nur endlich vielen offenen Mengen) ist quasikompakt. Ein diskreter Raum X ist genau dann quasikompakt (und damit kompakt), wenn er endlich ist (betrachte die Überdeckung $\{\{x\} : x \in X\}$).

Nun wieder ein wenig Prüfungsvorbereitung für die, die die Analysisprüfung noch nicht hinter sich haben.

4.4. Proposition. *Ein abgeschlossener Unterraum A eines quasikompakten Raumes X ist quasikompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$ eine offene Überdeckung von A. Betrachte nun $\mathcal{C}' := \{U \subset X : U \text{ offen}, U \cap A \in \mathcal{C}\}$. Nach der Definition der Unterraumtopologie gibt es zu jedem $V \in \mathcal{C}$ ein $U \in \mathcal{C}'$ mit $U \cap A = V$. Daher ist $\mathcal{C}' \cup \{X - A\}$ eine offene Überdeckung von X und hat eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{C}''$. $\{U \cap A : U \in \mathcal{C}''\}$ ist nun eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{C}$. □

4.5. Proposition. *Eine quasikompakte Teilmenge K eines Hausdorffraumes X ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $x \in X - K$. Es ist zu zeigen, dass $X - K$ Umgebung von x ist. Setze $\mathcal{C} := \left\{X - \overline{U} : U \text{ Umgebung von } x\right\}$. Da X hausdorffsch ist, ist $\bigcup \mathcal{C} = X - \{x\}$, also $\mathcal{C}' := \{U \cap K : U \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von K. Nun existiert eine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{C}'$, also auch eine endliche Menge $\mathcal{U}$ von Umgebungen von X, so dass $\bigcup\left\{X - \overline{U} : U \in \mathcal{U}\right\} \supset K$, also $\bigcap \mathcal{U} \subset X - K$. Nun ist $\bigcap \mathcal{U}$ eine Umgebung von x, also ist auch $X - K$ eine Umgebung von x. □

Stetige Bilder quasikompakter Räume sind quasikompakt.

4.6. Proposition. *Sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv und X quasikompakt. Dann ist auch Y quasikompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von Y. Dann ist $\left\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{C}\right\}$ eine offene Überdeckung von X. Es gibt daher eine endliche Teilmenge $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, so dass $\left\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{C}'\right\}$ eine Überdeckung von X ist. Aus der Surjektivität von f folgt, dass $\mathcal{C}'$ eine Überdeckung von Y ist: Sei $y \in Y$ und $x \in X$ mit $f(x) = y$. Nun existiert $U \in \mathcal{C}'$ mit $x \in f^{-1}[U]$, also $y = f(x) \in U$. □

Kompaktheit kann sehr nützlich bei der Konstruktion stetiger Abbildungen sein.

4.7. Proposition. *Seien X, Y Räume, X quasikompakt, Y hausdorffsch und sei $p : X \to Y$ eine stetige Surjektion. Dann ist für jeden Raum Z und jede Funktion $f : Y \to Z$, so dass $f \circ p$ stetig ist, bereits f stetig.*

4.8. Bemerkung. Man kann das auch wie folgt ausdrücken: Sind X, Y, Z und p wie eben beschrieben und ist $g : X \to Z$ eine stetige Abbildung, so dass $g(x) = g(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $p(x) = p(x')$, so existiert genau eine stetige Abbildung $f : Y \to Z$, so dass

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, dashed, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Sei $A \subset Z$ abgeschlossen. Es ist zu zeigen, dass $f^{-1}[A]$ abgeschlossen ist. Da $f \circ p$ stetig ist, ist $p^{-1}[f^{-1}[A]]$ abgeschlossen, also nach Proposition 4.4 quasikompakt. Nach Proposition 4.6 ist $p[p^{-1}[f^{-1}[A]]]$ quasikompakt und nach Proposition 4.5 abgeschlossen. Da p surjektiv ist, ist $p[p^{-1}[f^{-1}[A]]] = f^{-1}[A]$. □

4.9. Beispiel. Ist Z ein beliebiger Raum und $g\colon I \to Z$ eine stetige Funktion mit $g(0) = g(1)$, so gibt es eine stetige Funktion $f\colon S^1 \to Z$ mit $f(\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) = g(t)$ für $t \in I$. Natürlich hätte man das auch noch leicht per Hand nachrechnen können.

4.10. Korollar. *Ist $h\colon X \to Y$ eine stetige Bijektion von einem quasikompakten Raum in einen Hausdorffraum, so ist h ein Homöomorphismus.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $h^{-1}\colon Y \to X$ stetig ist, und nach dem eben gezeigten ist das der Fall, da $h^{-1} \circ h = \mathrm{id}_X$ stetig ist. □

Produkte

Eine typische Anwendung von Kompaktheit ist auch die folgende Proposition. Man benutzt sie zum Beispiel, um zu zeigen, dass ein lokaler Fluss auf einer kompakten Mannigfaltigkeit (oder ein lokaler Fluss auf $\mathbb{R}^n$, der außerhalb eines Kompaktums konstant ist) zu einem globalen Fluss erweitert werden kann.

4.11. Proposition. *Seien X, Y Räume. Ist Y quasikompakt, $x \in X$ und $O \subset X \times Y$ offen mit $\{x\} \times Y \subset O$, so existiert eine Umgebung U von x, so dass $U \times Y \subset O$.*

Beweis. Wir erinnern uns, dass $\{V \times W : V \subset X \text{ offen}, W \subset Y \text{ offen}\}$ eine Basis der Produkttopologie ist. Daher gilt, wenn wir

$$\mathcal{C} := \{V \times W : V \text{ Umgebung von } x,\, W \subset Y \text{ offen},\, V \times W \subset O\}$$

setzen, $\{x\} \times Y \subset \bigcup \mathcal{C}$. Nun ist $\{W \subset Y : \text{Es ex. } V \subset X \text{ mit } V \times W \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von Y. Aus der Quasikompaktheit von Y folgt nun die Existenz von $n \in \mathbb{N}$ und für $1 \leq k \leq n$ Umgebungen $V_k \subset X$ von x und offenen Mengen $W_k \subset Y$, so dass $V_k \times W_k \subset O$ und $\bigcup_{k=1}^n W_k = Y$. Nun ist $U := \bigcap_{k=1}^n V_k$ eine Umgebung von x und

$$U \times Y = U \times \bigcup_{k=1}^n W_k \subset \bigcup_{k=1}^n (V_k \times W_k) \subset O,$$

wie gefordert. □

Dies ist auch ein Schritt im Beweis der folgenden Proposition, den wir trotz ihrer Wichtigkeit als Übung stellen, da sie später noch in größerer Allgemeinheit bewiesen werden wird.[1]

4.12. Proposition. *Das Produkt zweier quasikompakter Räume ist quasikompakt.*

Beweis. In Aufgabe 14. □

Da wir das bisher versäumt haben, notieren wir auch noch:

4.13. Proposition. *Das Produkt zweier Hausdorffräume ist hausdorffsch.*

Beweis. Seien X, Y Hausdorffräume, $(x, y), (x', y') \in X \times Y$, $(x, y) \neq (x', y')$. Dann ist $x \neq x'$ oder $y \neq y'$, oBdA $x \neq x'$. Seien U, U' disjunkte Umgebungen von x beziehungsweise x'. Dann sind $U \times Y$ und $U' \times Y$ disjunkte Umgebungen von (x, y) beziehungsweise (x', y'). □

Metrische Räume

Wenn wir uns nicht zu sehr auf das in der Analysis gezeigte beziehen wollen, sollten wir nun noch zeigen, dass eine Teilmenge eines euklidischen Raumes genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Aufgrund des bisher gezeigten, würde es genügen, zu zeigen, dass das Einheitsintervall kompakt ist; man überlege sich das. Das ginge auch schnell, wäre aber nicht sonderlich spannend. In [Mun75, Chap. 3, Thm. 6.1] findet man eine Verallgemeinerung auf gewisse geordnete Räume. Wir werden eine Verallgemeinerung auf metrische Räume behandeln, wie sie zum Beispiel in [Bre93, I.9] dargestellt ist. Dazu müssen wir allerdings für metrische Räume gewisse Begriffe wie Cauchy-Folgen als bekannt voraussetzen.

4.14. Definition. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.

4.15. Definition. Ein metrischer Raum heißt *total beschränkt*, wenn er für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung durch endlich viele ε-Kugeln besitzt.

4.16. Proposition. *In einem metrischen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) X ist kompakt.

(ii) X ist vollständig und total beschränkt.

[1] Der spätere Beweis wird allerdings das Auswahlaxiom benötigen, was hier nicht der Fall ist.

Der Beweis ist im wesentlichen der, mit dem in Analysis II häufig gezeigt wird, dass I^n kompakt ist. Insofern ist die Formulierung der Proposition vielleicht interessanter als der Beweis, da hier in gewisser Weise die richtige Verallgemeinerung gefunden wurde.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei X nicht vollständig und (a_n) eine nicht konvergente Cauchy-Folge. Zu beliebigem $x \in X$ existiert dann ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgenglieder nicht in $B_\varepsilon(x)$ liegen. Da (a_n) Cauchy-Folge ist, folgt daraus, dass es ein ε_x gibt, so dass nur endlich viele Folgenglieder in $B_{\varepsilon_x}(x)$ liegen. Nun ist $\{B_{\varepsilon_x}(x) \colon x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X. Da in jedem Element dieser Überdeckung nur endlich viele Folgenglieder liegen, kann sie keine endliche Teilüberdeckung haben. Damit ist X nicht kompakt.

Sei nun X kompakt und $\varepsilon > 0$. Die Menge aller ε-Bälle überdeckt X und aufgrund der Kompaktheit genügen tatsächlich endlich viele. Damit ist X total beschränkt.

„$\Leftarrow$" Sei X vollständig und total beschränkt und $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von X. Wir werden die Annahme, dass $\mathcal{C}$ keine endliche Teilüberdeckung habe, zum Widerspruch führen. Setze zunächst $A_{-1} := X$. Angenommen $A_{n-1} \subset X$ sei definiert und werde von keiner endlichen Teilmenge von $\mathcal{C}$ überdeckt. Dann können wir X mit endlich vielen $\frac{1}{2^n}$-Kugeln überdecken, und eine von denen, die A_{n-1} treffen wird wiederum von keiner endlichen Teilmenge von $\mathcal{C}$ überdeckt. Sei A_n eine solche Kugel und x_n ihr Mittelpunkt. Nun ist (x_n) eine Cauchy-Folge und $B_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ wird von keiner endlichen Teilmenge von $\mathcal{C}$ überdeckt. Da X vollständig ist, konvergiert (x_n) gegen einen Punkt, den wir y nennen wollen. Nun gibt es ein $O \in \mathcal{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y) \subset O$. Nun gibt es aber ein n, so dass $x_n \in B_{\varepsilon/2}(y)$ und $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, was zu einem Widerspruch führt. $\square$

4.17. Korollar. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und in der euklidischen Norm beschränkt ist.*

Beweis. Der Unterraum X des vollständigen metrischen Raumes $\mathbb{R}^n$ ist genau dann vollständig, wenn er abgeschlossen ist. Wir zeigen nun noch, dass er genau dann beschränkt ist, wenn er total beschränkt ist. Es ist leicht zu sehen, dass ein unbeschränktes X nicht total beschränkt sein kann. Sei nun X beschränkt und $\varepsilon > 0$. Wiederum ist leicht zu sehen, dass es möglich ist, X mit endlich vielen $\frac{\varepsilon}{2}$ Kugeln *in* $\mathbb{R}^n$ zu überdecken. Lasse nun jede Kugel einer solchen Überdeckung weg, falls ihr Schnitt mit X leer ist und ersetze sie ansonsten durch die ε-Kugel um einen Punkt in diesem Schnitt. Dies ergibt eine Überdeckung von X mit endlich vielen ε-Kugeln. $\square$