Lieferung 5

Produkte und mehr

Initial- und Finaltopologien

Wir beginnen mit zwei Definitionen. Diese sind recht abstrakt, aber wir werden sogleich sehen, dass sie uns bereits Bekanntes verallgemeinern.

5.1. Definition. Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j : Y_j \to X$ Funktionen für $j \in J$. Wir nennen eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X *Finaltopologie bezüglich der* f_j, wenn folgendes gilt:

(i) Die $f_j : Y_j \to (X, \mathcal{T})$ sind stetig.

(ii) Für alle Räume Z und Funktionen $g\colon X \to Z$ gilt: Sind alle $g \circ f_j : Y_j \to Z$ stetig, so ist $g\colon (X, \mathcal{T}) \to Z$ stetig.

$$\begin{tikzcd} Y_j \arrow[dr, "f_j"'] \arrow[drr, "g\circ f_j"] & & \\ & (X,\mathcal{T}) \arrow[r, dotted, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

5.2. Definition. Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j : X \to Y_j$ Funktionen für $j \in J$. Wir nennen eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X *Initialtopologie bezüglich der* f_j, wenn folgendes gilt:

(i) Die Abbildungen $f_j\colon (X, \mathcal{T}) \to Y_j$ sind stetig.

(ii) Für alle Räume Z und Funktionen $g\colon Z \to X$ gilt: Sind alle $f_j \circ g\colon Z \to Y_j$ stetig, so ist $g\colon Z \to (X, \mathcal{T})$ stetig.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[drr, "f_j\circ g"'] & (X,\mathcal{T}) \arrow[dr, "f_j"] & \\ & & Y_j \end{tikzcd}$$

Auch wenn wir die Diagramme noch gespiegelt haben, sieht man: Die beiden Definitionen gehen durch *Umkehren aller Pfeile* ineinander über. Bei der *Initial*topologie steht der Raum X *vorne* an den zu f_j gehörigen Pfeilen, bei der *Final*topologie steht er *hinten*.

5.3. Beispiel. Ist Y ein Raum und $X \subset Y$, so ist die Unterraumtopologie auf X Initialtopologie bezüglich der Inklusion $i\colon X \to Y$. Das haben wir in Proposition 2.26 gesehen.

5.4. Beispiel. Sind X, Y Räume, Y quasikompakt und X hausdorffsch und $p\colon Y \to X$ eine stetige Surjektion, so ist die Topologie von X Finaltopologie bezüglich p. Das haben wir in Proposition 4.7 gezeigt.

5.5. Beispiel. Sind X, Y Räume, so ist die Produkttopologie auf $X \times Y$ Initialtopologie bezüglich der kanonischen Projektionen $p_1\colon X \times Y \to X$ und $p_2\colon X \times Y \to Y$. Das haben wir in Korollar 2.37 gezeigt.

Das letzte Beispiel ist für uns im Moment insofern das wichtigste, als wir für das Produkt zweier Räume eigentlich schon alles gezeigt haben, was es für Initialtopologien zu zeigen gibt.

Wir werden nun Existenz und Eindeutigkeit von Initial- und Finaltopologien zeigen. Der Beweis der Eindeutigkeit ist so formal, dass es genügt, ihn für Initial- oder Finaltopologien durchzuführen. Der andere Beweis folgt dann durch Umkehren aller Pfeile.

5.6. Proposition. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j\colon Y_j \to X$ Funktionen für $j \in J$. Es seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X, so dass $\mathcal{T}_1$ Eigenschaft* (i) *aus der Definition der Finaltopologie hat und $\mathcal{T}_2$ Eigenschaft* (ii)*. Dann ist $\mathcal{T}_1$ gröber als $\mathcal{T}_2$.*

Beweis. Sei $i\colon (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ die Funktion, die auf X die Identität ist. Es ist die Stetigkeit von i zu zeigen. Da $\mathcal{T}_2$ Eigenschaft (ii) hat, genügt dazu die Stetigkeit aller $i \circ f_j$, und das ist gerade die Eigenschaft (i) für $\mathcal{T}_1$. □

5.7. Korollar. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j\colon Y_j \to X$ Funktionen für $j \in J$. Existiert die Finaltopologie bezüglich der f_j, so ist sie eindeutig bestimmt.* □

5.8. Proposition. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j\colon X \to Y_j$ Funktionen für $j \in J$. Es seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X, so dass $\mathcal{T}_1$ Eigenschaft* (i) *aus der Definition der Initialtopologie hat und $\mathcal{T}_2$ Eigenschaft* (ii)*. Dann ist $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$.*

Beweis. Wie Proposition 5.6, nur mit umgekehrten Pfeilen. □

5.9. Korollar. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j\colon X \to Y_j$ Funktionen für $j \in J$. Existiert die Initialtopologie bezüglich der f_j, so ist sie eindeutig bestimmt.* □

Wir müssen also nur noch die Frage der Existenz klären. Die eben gezeigten Propositionen zeigen schon, wie Final- und Initialtopologien aussehen müssen, wenn sie existieren: Die Initialtopologie muss die gröbste sein, so dass die f_j stetig sind, die Finaltopologie die feinste.

5.10. Proposition. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j\colon Y_j \to X$ Funktionen für $j \in J$. Dann ist*

$$\mathcal{T} := \Big\{ O \subset X \colon f_j^{-1}[O] \text{ offen in } Y_j \text{ für alle } j \in J \Big\}$$

die Finaltopologie auf X bezüglich der f_j.

Beweis. Zunächst ist zu bemerken, dass $\mathcal{T}$ tatsächlich eine Topologie ist, da f^{-1} mit Vereinigungen und Schnitten vertauscht. Dass die $f_j\colon Y_j \to (X, \mathcal{T})$ stetig sind, ist offensichtlich. Sei nun Z ein Raum und $g\colon X \to Z$ eine Funktion, so dass $g \circ f_j$ für alle $j \in J$ stetig ist. Für offenes $U \subset Z$ ist dann für alle $j \in J$ die Menge $(g \circ f_j)^{-1}[U] = f_j^{-1}[g^{-1}[U]]$ offen, also $g^{-1}[U] \in \mathcal{T}$. Damit ist $g\colon (X, \mathcal{T}) \to Z$ stetig. □

5.11. Proposition. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j\colon X \to Y_j$ Funktionen für $j \in J$. Dann ist die durch die Subbasis*

$$\mathcal{S} := \bigcup_{j \in J} \Big\{ f_j^{-1}[O] \colon O \subset Y_j \text{ offen} \Big\}$$

definierte Topologie auf X die Initialtopologie bezüglich der f_j.

Beweis. Wie für das Produkt zweier Räume in Proposition 2.34 und Proposition 2.36. □

Spezialfälle

Wir stellen nun die für uns wichtigsten Fälle zusammen, in denen Mengen mit der Initial- oder Finaltopologie versehen werden: Unterräume, Produkte, Quotienten und Summen. Über Unterräume haben wir bereits geredet. Endliche Produkte sind uns schon bekannt, über beliebige Produkte wird es sogleich noch einiges zu sagen geben. Quotienten betrachten wir danach, und über Summen gibt es nicht viel zu sagen.

Unterräume

5.12. Definition. Seien X, Y Räume. Eine Funktion $i\colon X \to Y$ heißt *Einbettung*, wenn sie injektiv ist und X die Initialtopologie bezüglich i trägt.

Die Funktion i ist also gerade dann eine Einbettung, wenn sie ein Homöomorphismus zwischen X und dem mit der Unterraumtopologie versehenen Bild $i[X]$ ist.

Produkte

Bevor wir beliebige Produkte topologischer Räume definieren, erinnern wir an das kartesische Produkt von Mengen und legen dafür Notation fest.

5.13. Notation. Sei J eine beliebige Menge und M_j eine Menge für alle $j \in J$. Das *kartesische Produkt* der M_j ist

$$\prod_{j \in J} M_j := \left\{ x \colon J \to \bigcup_{j \in J} M_j \;\middle|\; x(j) \in M_j \text{ für alle } j \in J \right\}.$$

Anstelle von $x(j)$ schreiben wir meist x_j und dementsprechend auch $(x_j)_{j \in J}$ anstelle von x. Die *kanonischen Projektionen* sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} p_k \colon \prod_{j \in J} M_j &\to M_k, \qquad k \in J, \\ x &\mapsto x_k. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass für Mengen M und N

$$M^N := \{x \colon N \to M\}$$

gerade der Spezialfall $M^N = \prod_{j \in N} M$ ist.

5.14. Definition. Seien J eine beliebige Menge und X_j topologische Räume für $j \in J$. Das *Produkt* $\prod_{j \in J} X_j$ der Räume X_j ist das kartesische Produkt der zugrunde liegenden Mengen versehen mit der Initialtopologie bezüglich der kanonischen Projektionen, die wir die *Produkttopologie* nennen.

5.15. Notation. Wir schreiben auch $X_0 \times \cdots \times X_{n-1}$ für $\prod_{j \in \{0,\ldots,n-1\}} X_j$.

Nun zu den dualen Konzepten.

Quotienten

5.16. Definition. Seien X, Y Räume. Eine Abbildung $q \colon X \to Y$ heißt *Quotientenabbildung*, wenn q surjektiv ist und Y die Finaltopologie bezüglich q ist. Diese Topologie auf Y nennen wir die Quotiententopologie bezüglich q.

Summen

5.17. Notation. Sei J eine beliebige Menge und M_j eine Menge für alle $j \in J$. Das *Koprodukt* der M_j ist

$$\coprod_{j \in J} M_j := \bigcup_{j \in J} \left(M_j \times \{j\}\right).$$

Die *kanonischen Inklusionen* sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} i_k\colon M_k &\to \coprod_{j\in J} M_j, \qquad k \in J,\\ x &\mapsto (x,k). \end{aligned}$$

Die Idee hinter der Konstruktion $M_j \times \{j\}$ ist nur, dass so ganz sicher für $j \neq j'$ die Mengen $M_j \times \{j\}$ und $M_{j'} \times \{j'\}$ disjunkt sind. Sind M_j und $M_{j'}$ für alle $j, j' \in J$ mit $j \neq j'$ ohnehin disjunkt, können wir auch einfach $\coprod_{j\in J} M_j = \bigcup_{j\in J} M_j$ und $i_k(x) = x$ setzen.

5.18. Definition. Seien J eine beliebige Menge und X_j topologische Räume für $j \in J$. Die *topologische Summe* $\coprod_{j\in J} X_j$ ist das Koprodukt der zugrunde liegenden Mengen versehen mit der Finaltopologie bezüglich der kanonischen Inklusionen.

5.19. Notation. Wir schreiben auch $X_0 + \cdots + X_{n-1}$ für $\coprod_{j\in\{0,\ldots,n-1\}} X_j$.

Zwischenspiel: Abzählbares

Bevor wir uns näher mit Produkten beschäftigen, wollen wir noch ein paar Begriffe einführen.

5.20. Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik auf X gibt, die $\mathcal{T}$ induziert.

5.21. Definition. Man sagt, ein topologischer Raum erfülle das *erste Abzählbarkeitsaxiom*,[1] wenn jeder seiner Punkte eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

5.22. Proposition. *Sei X ein topologischer Raum. Ist X metrisierbar, so erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Sei d eine Metrik, die die Topologie von X induziert und $x \in X$. Dann ist $\{B_{1/n}(x)\colon n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von X. $\square$

Die $\frac{1}{n}$-Umgebungen haben noch die angenehme Eigenschaft, ineinander zu liegen. Das kann man auch allgemein bei einem das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllenden Raum erreichen:

5.23. Lemma. *Sei X ein Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfülle, und $x \in X$. Dann hat x eine Umgebungsbasis der Form $\{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ mit $U_n \subset U_m$ für alle n, m mit $n \geq m$.*

[1] Diese Eigenschaft ein Axiom zu nennen, ist eigentlich etwas unglücklich. Vor allem ist es unpraktisch, kein Adjektiv für diese Eigenschaft zu haben. Im englischen Sprachraum hingegen sagt man auch einfach “X is first countable”, was zwar vielleicht sprachlich fragwürdig, aber sehr angenehm ist.

Beweis. Zunächst hat x überhaupt eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{B}$, also eine der Form $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. (Sollte $\mathcal{B}$ tatsächlich endlich sein, so wiederhole man ein Element einfach unendlich oft.) Setze nun $U_n := \bigcap_{k \leq n} V_k$. Dann gilt für $m \geq n$, dass $U_m \subset U_n$, und die U_n sind Umgebungen von x, da endliche Schnitte offener Mengen offen sind. Ist nun O eine beliebige Umgebung von x, so gibt es, da $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x ist, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $V_n \subset O$. Da $U_n \subset V_n$, ist auch $U_n \subset O$ und damit $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x. □

5.24. Definition. Man sagt, ein topologischer Raum erfülle das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

5.25. Proposition. *Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind X_i, $1 \leq i \leq n$ Räume, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, so erfüllt auch $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Sei $\mathcal{B}_i$ eine Basis der Topologie von X_i, so ist

$$\{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n : U_i \in \mathcal{B}_i\}$$

abzählbar und eine Basis der Topologie des Produkts, was (für $n = 2$) bereits in Aufgabe 8 nachgerechnet wurde. □

5.26. Proposition. *$\mathbb{R}^n$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Es genügt, $\mathbb{R}$ zu betrachten, und in Aufgabe 8 wurde auch gezeigt, dass die abzählbare Menge $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ eine Basis der Topologie von $\mathbb{R}$ ist. □

Produkte

Da Produkte so wichtig sind, wollen wir die in Proposition 5.11 für eine Initialtopologie angegebene Subbasis für ein Produkt explizit hinschreiben.

5.27. Proposition. *Seien J eine beliebige Menge und $(X_j, \mathcal{T}_j)$ für $j \in J$ Räume. Dann ist*

$$\left\{ \prod_{j \in J} O_j : O_j \in \mathcal{T}_j \text{ f. a. } j \in J, \text{ es ex. } k \in J, \text{ s. d. } O_j = X_j \text{ f. a. } j \neq k \right\}$$

eine Subbasis der Produkttopologie auf $\prod_{j \in J} X_j$.

Beweis. Ist p_k die kanonische Projektion und $U \in \mathcal{T}_k$, so ist

$$p_k^{-1}[U] = \prod_{j \in J} O_j \qquad \text{mit } O_j = \begin{cases} U, & j = k, \\ X_j, & j \neq k, \end{cases}$$

und diese Mengen bilden nach Konstruktion der Initialtopologie eine Subbasis. □

5.28. Proposition. *Seien J eine beliebige Menge und $(X_j, \mathcal{T}_j)$ für $j \in J$ Räume. Dann ist*

$$\left\{ \prod_{j \in J} O_j \colon O_j \in \mathcal{T}_j \text{ f. a. } j \in J,\ O_j = X_j \text{ für fast alle } j \right\},$$

wobei ‚fast alle' alle bis auf endlich viele bedeute, eine Basis der Produkttopologie auf $\prod_{j \in J} X_j$.

Beweis. Dies sind gerade die endlichen Schnitte von Elementen der Subbasis aus der vorhergehenden Proposition. □

Man beachte, dass beliebige Mengen der Form $\prod_{j \in J} O_j$ mit $O_j \in \mathcal{T}_j$ im allgemeinen in der Produkttopologie *nicht* offen sind. Dadurch werden die Umgebungsbasen in großen Produkten schnell groß.

5.29. Proposition. *Sei J überabzählbar und seien X_j Räume für $j \in J$. Ist $x \in \prod_{j \in J} X_j$ und gibt es für jedes $j \in J$ eine von X_j verschiedene Umgebung von x_j, so hat x keine abzählbare Umgebungsbasis.*

Beweis. Sei $\{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Menge von Umgebungen von x. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$F_n := \{j \in J \colon p_j[U_n] \neq X_j\}$$

endlich. Daher ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ abzählbar und damit ungleich J. Sei nun $j \in J$ mit $j \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ und $V \neq X_j$ eine Umgebung von x_j. Dann enthält die Umgebung $p_j^{-1}[V]$ von x_j kein U_n, denn es ist $p_j[p_j^{-1}[V]] = V \neq X_j$, aber aufgrund der Wahl von j ist $p_j[U_n] = X_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $\{U_n\}$ keine Umgebungsbasis von x. □

Man könnte nun hoffen, dass es, wenn schon keine abzählbaren, so doch wenigstens immer ähnlich Lemma 5.23 geordnete Umgebungsbasen gibt. Auch das ist nicht der Fall.

5.30. Proposition. *Sei J überabzählbar und seien X_j Räume für $j \in J$. Ist $x \in \prod_{j \in J} X_j$ und gibt es für jedes $j \in J$ eine von X_j verschiedene Umgebung von x_j, so besitzt x keine Umgebungsbasis, die durch Inklusion total geordnet ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x. Man wähle für alle $n \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene $j_n \in J$. Da J überabzählbar ist, ist das möglich. Man wähle zu jedem n eine von X_{j_n} verschiedene Umgebung U_n von x_{j_n}. Da $V_n := \bigcap_{k=0}^{n} p_{j_k}^{-1}[U_k]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Umgebung von x ist, ist es möglich zu jedem n ein $B_n \in \mathcal{B}$ mit $B_n \subset V_n$ zu wählen. Da wir bereits gezeigt haben, dass x keine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, ist insbesondere $\{B_n\}$ keine Umgebungsbasis von x, und es gibt eine Umgebung W von x mit $B_n \not\subset W$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gibt aber eine Umgebung $C \in \mathcal{B}$ mit $C \subset W$. Damit ist $B_n \not\subset C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wäre nun $\mathcal{B}$ durch Inklusion total geordnet, so wäre $C \subset B_n$ für alle n und damit $C \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Also wäre $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} p_{j_k}^{-1}[U_k]$ eine Umgebung von x. Dies ist aber nicht der Fall, denn da alle j_k verschieden sind und $U_k \neq X_{j_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, enthält $\bigcap_{k=0}^{\infty} p_{j_k}^{-1}[U_k]$ kein nicht-leeres Element der in Proposition 5.28 angegebenen Basis der Produkttopologie. □