Lieferung 7

Ordinalzahlen *ad hoc*

Es überrascht nicht, dass man für mengentheoretische Topologie manchmal Mengenlehre braucht. Die Konstruktion einiger Beispiele würden wir gerne mit „Man nehme die kleinste überabzählbare Ordinalzahl“ beginnen, können das aber nicht, da das Wissen um Ordinalzahlen nicht vorausgesetzt werden kann. Das Ziel dieses Abschnitts ist es, so viel Mengenlehre zur Verfügung zu stellen, um diese Konstruktionen dennoch durchführen zu können, selbst wenn wir hier nicht definieren, was eine Ordinalzahl ist.

Wohlordnungen

7.1. Definition. Sei M eine Menge. Eine totale Ordnung auf M heißt eine *Wohlordnung*, wenn bezüglich ihr jede nicht-leere Teilmenge von M ein kleinstes Element besitzt.

7.2. Beispiele.

- ▷ Jede totale Ordnung auf einer endlichen Menge ist eine Wohlordnung.
- ▷ Die Restriktion einer Wohlordnung auf eine Teilmenge ist eine Wohlordnung.
- ▷ Mit den üblichen Ordnungen ist $\mathbb{Z}$ nicht wohlgeordnet, aber $\mathbb{N}$ wohlgeordnet. Letzteres ist genau das Prinzip der vollständigen Induktion.
- ▷ Sind $(M, \leq_M)$ und $(N, \leq_N)$ disjunkte wohlgeordnete Mengen und ordnet man $M \cup N$ so, dass zuerste alle Elemente von M und dann alle von N kommen, also durch

$$\begin{aligned} x \leq y \quad :\Longleftrightarrow \quad & (x \in M \wedge y \in N) \\ & \vee ((x, y \in M) \wedge (x \leq_M y)) \\ & \vee ((x, y \in N) \wedge (x \leq_N y)), \end{aligned}$$

  so definiert dies eine Wohlordnung auf $M \cup N$: Sei $A \subset M \cup N$. Ist $A \cap M \neq \emptyset$ nicht leer, so besitzt $A \cap M$ ein kleinstes Element bezüglich $\leq_M$ und dieses ist kleinstes Element von A bezüglich $\leq$. Ansonsten besitzt $A = A \cap N$ ein kleinstes Element bezüglich $\leq_N$ also bezüglich $\leq$.

▷ Das letzte Beispiel spezialisierend erhält man aus einer Wohlordnung eine neue Wohlordnung, indem man ein weiteres Element hinzufügt, dass größer als alle ursprünglichen ist.

7.3. Notation. Ist M eine nicht-leere wohlgeordnete Menge, so hat sie ein kleinstes Element. Dieses bezeichnen wir mit 0_M oder auch nur mit 0.

7.4. Notation. Ist $\leq$ eine Ordnung auf einer Menge M, so benutzen wir die Intervallschreibweise, also etwa für $a, b \in M$

$$(a, b] := \{x \in M \colon a < x \leq b\}\,.$$

7.5. Definition und Proposition. Es sei $(M, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge und $x \in M$ nicht maximales Element von M. Dann ist $\{y \in M \colon y > x\}$ also nicht leer und hat damit ein kleinstes Element. Dieses schreiben wir $\operatorname{succ} x$ und nennen es den *Nachfolger* von x.

7.6. Lemma. *Sei M eine wohlgeordnete Menge und $x \in M$. Dann tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein.*

(i) Es existiert ein $x' \in M$ mit $x = \operatorname{succ} x'$.

(ii) Es ist $[0, x) = \bigcup_{x' < x} [0, x')$.

□

7.7. Definition. Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Eine Teilmenge $A \subset M$ nennen wir ein *Anfangsstück* von A, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \in A$ und $y \leq x$ gilt, dass $y \in A$. Ein Anfangsstück A heißt *echtes Anfangsstück*, wenn $A \neq M$.

7.8. Proposition. *Sei $(M, \leq)$ eine wohlgeordnete Menge und $A \subset M$. A ist genau dann echtes Anfangsstück von M, wenn ein $x \in M$ mit $A = [0_M, x)$ existiert.*

Beweis. Dass Teilmengen der Form $[0, x)$ echte Anfangsstücke sind, ist klar. Sei also A ein echtes Anfangsstück. Da $M \setminus A \neq \emptyset$, hat $M \setminus A$ ein kleinstes Element x. Es ist also $[0, x) \subset A$ und $x \notin A$. Da A Anfangsstück ist, gilt für alle $y \in A$ mit $y \geq x$ auch $y \notin A$. Damit ist $[0, x) = A$. □

7.9. Lemma. *Es seien M, N wohlgeordnete Mengen. Sind $f, g \colon M \to N$ Ordnungsisomorphismen auf Anfangsstücke von N (also injektive monotone Abbildungen, deren Bilder Anfangsstücke sind), so ist $f = g$.*

Beweis. Ist $x \in M$, so ist $f[[0, x)]$ ein echtes Anfangsstück von N, also existiert ein eindeutig bestimmtes $y \in N$ mit $f[[0_M, x)] = [0_N, y)$. Da auch $f[[0, x]]$ Anfangsstück ist, muss $f(x) = y$ sein. Da selbiges für g gilt, muss entweder $f(x) = g(x)$ sein oder ein $x' < x$ mit $f(x') \neq g(x')$ existieren. Also hat $B = \{x \in M \colon f(x) \neq g(x)\}$ kein kleinstes Element und ist damit leer. □

Eine Wohlordnung ist eine so starke Struktur, dass es in gewisser Weise weniger Wohlordnungen gibt, als man vielleicht zunächst denken würde.

7.10. Proposition. *Es seien M und N wohlgeordnete Mengen. Dann tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein.*

(i) Es gibt ein eindeutig bestimmtes $x \in M$ und einen Ordnungsisomorphismus zwischen $[0_M, x)$ und N.

(ii) Es gibt einen Ordnungsisomorphismus zwischen M und N.

(iii) Es gibt ein eindeutig bestimmtes $y \in N$ und einen Ordnungsisomorphismus zwischen M und $[0_N, y)$.

Beweis. Alle Eindeutigkeitsaussagen folgen aus Lemma 7.9. Zunächst fügen wir, um die Argumentation ein wenig zu vereinfachen, zu M ein darin nicht enthaltenes Element m hinzu und machen $M' := M \cup \{m\}$ zu einer Wohlordnung, indem wir festlegen, dass m größer als alle Elemente von M sei. Es ist also $M = [0_M, m)$. Wir betrachten nun die Menge

$$B := \big\{x \in M' \colon \text{Es gibt keinen Ordnungsisomorphismus von } [0_M, x) \text{ auf ein Anfangsstück von } N.\big\}$$

Ist B leer, so ist insbesondere $m \notin B$, und es tritt Fall (ii) oder Fall (iii) ein. Ist B nicht leer, so hat B ein kleinstes Element x. Für alle $z < x$ existiert also ein Ordningsisomorphismus f_z von $[0_M, z)$ auf ein Anfangsstück von N. Aus Lemma 7.9 folgt, dass diese eindeutig bestimmt sind, und für $z' < z$, dass $f_z|_{[0,z')} = f_{z'}$. Wäre nun x kein Nachfolger, also nach Lemma 7.6 $[0, x) = \bigcup_{z<x}[0, z)$, so gäbe es daher eine eindeutig bestimmte Funktion $g\colon [0, x) \to N$ mit $g|_{[0,z)} = f_z$ für alle $z < x$. Diese wäre im Widerspruch zu $x \in B$ ein Ordnungsisomorphismus auf ein Anfangsstück von N, also existiert ein $x' \in M$ mit $x = \operatorname{succ} x'$. Nun ist $f_{x'}[[0, x')]$ ein Anfangsstück von N. Wäre es ein echtes Anfangsstück, sagen wir $[0_N, y')$, so würde $g|_{[0,x')]} = f_{x'}$, $g(x') = y'$ einen Ordnungsisomorphismus von $[0_M, x']$ auf $[0_N, y']$ definieren. Da aber $[0, x'] = [0, x)$, ein solcher Ordnungsisomorphismus also wegen $x \in B$ nicht existiert, ist $f_{x'}[[0, x')] = N$ und wir haben Fall (i). □

Wir haben in den letzten Beweisen gesehen, dass man für wohlgeordnete Mengen ganz ähnlich wie für $\mathbb{N}$ Induktionsbeweise führen und Objekte rekursiv definieren kann. Man darf nur nicht vergessen, dass nicht jedes Element Nachfolger ist und auch der andere Fall aus Lemma 7.6 zu behandeln ist. In jedem Fall ist es sehr nützlich auf einer Menge eine Wohlordnung zu haben.

Der Wohlordnungssatz

Der folgende ‚Satz' ist eine der bekannten Aussagen, die äquivalent zum Auswahlaxiom sind. Wir werden ihn aus dem Zornschen Lemma folgern, da dies

die Form des Auswahlaxioms ist, die auch meist in der Anfängervorlesung über Lineare Algebra benutzt wird.

7.11. Satz (Wohlordungssatz). *Jede Menge lässt sich wohlordnen.*

Beweis. Sei M die Menge, von der wir zeigen wollen, dass es auf ihr eine Wohlordnung gibt. Wir betrachten alle Wohlordnungen von Teilmengen von M:

$$W := \{(A, \leq) \colon A \subset M, \leq \text{ Wohlordnung auf } A\}.$$

W ist nicht leer, da die leere Menge Teilmenge von M ist und die einzige Ordnung der leeren Menge eine Wohlordnung ist. Wir definieren auf W eine partielle Ordnung $\preceq$ durch

$$(A, \leq) \preceq (A', \leq') \quad :\Longleftrightarrow \quad A \text{ ist Anfangsstück von } (A', \leq') \text{ und } \leq \text{ ist Einschränkung von } \leq'.$$

Sei nun $C \subset W$ eine Kette. Wir setzen

$$B := \bigcup_{(A,\leq)\in C} A.$$

Für $x, x' \in B$ gibt es nun $(A, \leq) \in C$ mit $x, x' \in A$. Wir setzen nun $x \leq_B x' \iff x \leq x'$. Da für $(A', \leq') \in C$ entweder $\leq'$ Einschränkung von $\leq$ ist oder umgekehrt, ergibt dies eine wohldefinierte Ordnung $\leq_B$ auf B. Dadurch, dass für alle $(A, \leq), (A', \leq') \in C$ gilt, dass A ein Anfangsstück von A' ist oder umgekehrt, folgt, dass für jedes $(A, \leq) \in C$ die Menge A ein Anfangsstück von B ist und damit, dass $\leq_B$ wieder eine Wohlordnung ist. $(B, \leq_B)$ ist also eine obere Schranke von C. Aus dem Zornschen Lemma folgt nun, dass $(W, \preceq)$ ein maximales Element $(N, \leq)$ hat. Nehmen wir nun an, dass $N \neq M$ und wählen wir ein $x \in M \setminus N$. Indem wir wieder x als größtes Element zu M hinzufügen, erhalten wir eine Wohlordnung auf $M \cup \{x\}$, die $\leq$ erweitert und M als echtes Anfangsstück hat. Da dies ein Widerspruch zur Maximalität von $(N, \leq)$ wäre, ist $N = M$ und $\leq$ eine Wohlordnung auf M. □

Die kleinste überabzählbare Ordinalzahl

Wir sind nun bereit, die Wohlordnung zu ‚konstruieren', die wir für einige Beispiele benutzen werden. Wir beginnen dazu mit einer beliebigen überabzählbaren Menge M, zum Beispiel der Menge der reellen Zahlen. Auf dieser legen wir eine Wohlordnung fest. Nun nehmen wir irgendein Objekt α, das nicht in M ist und erweitern die Wohlordnung auf M zu einer auf $M' := M \cup \{\alpha\}$, in der α größtes Element ist. Wir betrachten nun

$$\big\{x \in M' \colon [0, x) \text{ ist überabzählbar}\big\}.$$

Da $M = [0, \alpha)$, enthält diese Menge α, ist also nicht leer. Damit enthält sie ein kleinstes Element. Dieses nennen wir ab jetzt immer[1] ω_1. Wir halten die (bestürzende?) charakterisierende Eigenschaft von ω_1 fest:

7.12. Proposition. *$[0, \omega_1)$ ist überabzählbar und für jedes $x \in [0, \omega_1)$ ist $[0, x)$ abzählbar.* □

Dies charaktersiert diese Wohlordnung tatsächlich:

7.13. Proposition. *Ist N eine wohlgeordnete überabzählbare Menge, derer echte Anfangsstücke alle abzählbar sind, so existiert ein Ordnungsisomorphismus zwischen N und $[0, \omega_1)$.*

Beweis. Ist $x \in [0, \omega_1)$, so kann es keinen Ordnungsisomorphismus zwischen $[0, x)$ und N geben, da ersteres abzählbar, letzteres aber überabzählbar ist. Ebenso kann es keinen Ordnungsisomorphismus von $[0, \omega_1)$ auf ein echtes Anfangsstück von N geben. Damit muss die dritte Alternative aus Proposition 7.10 zutreffen, es also einen Ordnungsisomorphismus zwischen N und $[0, \omega_1)$ geben. □

Mit dem gleichen Argument ist die Menge der natürlichen Zahlen versehen mit der üblichen Ordnung isomorph zu einem echten Anfangsstück von $[0, \omega_1)$. Es gibt also ein $\omega_0 \in [0, \omega_1)$ und einen Ordnungsisomorphismus $f\colon \mathbb{N} \to [0, \omega_0)$. Auch die Notation ω_0 wollen wir beibehalten. Weiterhin werden wir uns erlauben, die Elemente von $[0, \omega_0)$ mit den natürlichen Zahlen zu identifizieren. Wir notieren kurz:

7.14. Proposition. *$[0, \omega_0)$ ist unendlich, und für jedes $x \in [0, \omega_0)$ ist $[0, x)$ endlich.* □

Das nun charakterisiert ω_0.

Endlich wieder Topologie

Versehen mit den entsprechenden Ordnungstopologien (siehe Aufgabe 6) werden die soeben eingeführten geordneten Mengen zu topologischen Räumen mit interessanten Eigenschaften, die uns auch in Zukunft noch als Beispiele dienen werden. Hier nur ein Vorgeschmack.

7.15. Proposition. *Wir betrachten den mit der Ordnungstopologie versehenen Raum $[0, \omega_1]$. ω_1 liegt im Abschluss von $[0, \omega_1)$ aber nicht im Abschluss irgendeiner abzählbaren Teilmenge von $[0, \omega_1)$.*

Wir zeigen zunächst:

[1] Zumindest bis wir genug Mengenlehre können, um es besser zu wissen.

7.16. Lemma. *Jede abzählbare Teilmenge von* $[0, \omega_1)$ *ist (nach oben) beschränkt.*

Man vergleiche das mit der einfachen Tatsachen, dass jede endliche Teilmenge von $[0, \omega_0)$ beschränkt ist.

Beweis. Sei $C \subset [0, \omega_1)$ abzählbar. $\bigcup_{a \in C} [0, a)$ ist als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar, $[0, \omega_1)$ aber überabzählbar. Also existiert ein $b \in [0, \omega_1) \setminus \bigcup_{a \in C} [0, a)$. Dieses ist obere Schranke von C. □

7.17. Lemma. ω_1 *ist kein Nachfolger.*

Beweis. Ist $a \in [0, \omega_1)$, so ist $[0, \operatorname{succ} a) = [0, a] = [0, a) \cup \{a\}$ abzählbar, also $\operatorname{succ} a \neq \omega_1$. □

Beweis von Proposition 7.15. Aufgrund der Definition der Ordnungstopologie ist $\{(a, \omega_1] \colon a \in [0, \omega_1)\}$ eine Umgebungsbasis von ω_1. Ist nun $(a, \omega_1]$ ein beliebiges Element aus der beschriebenen Umgebungsbasis von ω_1, so enthält es $\operatorname{succ} a \in [0, \omega_1)$. Damit liegt ω_1 im Abschluss von $[0, \omega_1)$.

Sei andererseits $C \subset [0, \omega_1)$ abzählbar. Dann besitzt C eine obere Schranke $m \in [0, \omega_1)$ und $(m, \omega_1]$ ist eine Umgebung von ω_1, die C nicht trifft. □

Man beweist ebenso oder folgert daraus:

7.18. Proposition. *In* $[0, \omega_1]$ *besitzt* ω_1 *keine abzählbare Umgebungsbasis.* □