Lieferung 8

Konvergenz I: Folgen und Netze

In metrischen Räumen kann man topologische Begriffe wie Stetigkeit, Abschluss, Kompaktheit auch mit Hilfe von Konvergenz von Folgen charakterisieren. Die Konvergenz einer Folge lässt sich auch in einem topologischen Raum definieren, es stellt sich jedoch heraus, dass im allgemeinen Folgen nicht zur Beschreibung eines topologischen Raumes ausreichen. Es gibt jedoch zwei andere Konvergenztheorien, die für topologische Räume das leisten, was folgen für metrische Räume leisten: die der Netze und die der Filter. Netze sind eine direkte Verallgemeinerung von Folgen, was sie zunächst anschaulicher und vertrauter macht. Auch scheint, dass einige Analytiker eher wissen, was Netze sind, als was Filter sind; und mit denen wollen wir uns ja schließlich unterhalten können. Andererseits mögen Mengentheoretiker Filter mehr, und in gewisser Weise ist die Theorie der Filter die einfachere. Vor allem ergibt sich natürlich das mächtige Konzept des Ultrafilters. Es gibt zwar auch ein entsprechendes Konzept für Netze, aber das ist weniger naheliegend.

Wir werden daher so vorgehen, nach einem kurzen Blick auf Folgen zunächst Netze zu betrachten, dort aber nur soviel beweisen, wie nötig ist, um eine Vorstellung davon zu gewinnen, wie diese Theorie aufgebaut ist. Danach wenden wir uns der Theorie der Filter zu, die wir zu „unserer“ Konvergenztheorie machen wollen.

Folgen

8.1. Definition. Sei X ein Raum. Eine *Folge* a in X ist eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to X$.

8.2. Definition. Sei X ein Raum, a eine Folge in X und $x \in X$. Wir sagen *a konvergiere* gegen x und schreiben $a \to x$, wenn für jede Umgebung U von x ein $n \in \mathbb{N}$ extistiert, so dass $a_m \in U$ für alle $m \geq n$.

8.3. Proposition. *Sei X ein Raum, $A \subset X$ und $x \in X$. Existiert eine Folge a mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \to x$, so ist $x \in \overline{A}$.*

Beweis. Ist U eine beliebige Umgebung von x, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U$, also ist $U \cap A \neq \emptyset$. □

8.4. Warnung. Die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht: Ist nämlich $X = [0, \omega_1]$ (mit der Ordnungstopologie versehen), so ist $\omega_1 \in \overline{[0, \omega_1)}$, aber für eine beliebige Folge a in $[0, \omega_1)$ haben wir in Proposition 7.15 gesehen, dass ω_1 nicht im Abschluss der abzählbaren Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ liegt und damit $a \not\to \omega_1$.

Es gilt aber:

8.5. Proposition. *Sei X ein Raum, $A \subset X$ und $x \in \overline{A}$ ein Punkt, der eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Dann gibt es eine Folge a in A, die gegen x konvergiert.*

Beweis. Sei $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x, nach Voraussetzung existiert eine solche. Wie in Lemma 5.23 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $U_m \subset U_n$ für alle m, n mit $m \geq n$. Da $x \in \overline{A}$, ist $U_n \cap A \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen (!) nun eine Folge a mit $a_n \in U_n \cap A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist nun V eine beliebige Umgebung von x, so existiert, da $\{U_n\}$ Umgenungsbasis ist, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n \subset V$ und daher $U_m \subset U_n \subset V$ für alle $m \geq n$. Damit konvergiert a gegen x. □

Wir fassen zusammen:

8.6. Proposition. *Sei X ein Raum, $A \subset X$ und $x \in X$. Existiert eine Folge in A, die gegen x konvergiert, so liegt x im Abschluss von A. Erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom, so gilt die Umkehrung, im allgemeinen aber nicht.* □

Netze

Definitionen

Wir suchen nun einen Ersatz für Folgen, durch den wir auch in beliebigen Räumen topologische Eigenschaften beschreiben können. Wir haben gesehen, dass Folgen nicht ausreichen, da die (abzählbare) Menge der natürlichen Zahlen als Indexmenge zu klein ist. Wir müssen also auch größere Mengen erlauben. Damit man dann wieder den Begriff der Konvergenz definieren kann, muss diese Menge geordnet sein. Dass wir im Beweis von Proposition 8.5 eine total geordnete Umgebungsbasis benutzt haben, wir aber aus Proposition 5.30 wissen, dass solche nicht immer existieren, legt nahe, dass wir von den Indexmengen nicht fordern dürfen, total geordnet zu sein. Es stellt sich heraus, dass der folgende Begriff geeignet ist.

8.7. Definition. Eine *gerichtete Menge* ist eine nicht-leere Menge D zusammen mit einer Halbordnung $\geq$, so für alle $k, l \in D$ ein $m \in D$ mit $m \geq k$ und $m \geq l$ existiert.

8.8. Definition. Sei X ein Raum. Ein *Netz* in X ist eine Abbildung $a\colon D \to X$, wobei D eine gerichtete Menge ist.

8.9. Bemerkung. Folgen sind spezielle Netze. Ein Netz a können wir wieder $(a_j)_{j\in J}$ schreiben, und es wird in der Notation fast wie eine Folge aussehen.

8.10. Definition. Sei X ein Raum, $(a_k)_{k\in D}$ ein Netz in X und $x \in X$. Wir sagen *a konvergiere* gegen x und schreiben $a \to x$, wenn für jede Umgebung U von x ein $k \in D$ extistiert, so dass $a_l \in U$ für alle $l \geq k$.

Erste Eigenschaften

Nun haben wir, was wir wollten:

8.11. Proposition. *Sei X ein Raum, $A \subset X$ und $x \in X$. x liegt genau dann im Abschluss von A, wenn ein Netz in A existiert, das gegen x konvergiert.*

Beweis. Sei $(a_k)_{k\in D}$ ein Netz in A, das gegen x konvergiert. Ist nun U eine beliebige Umgebung von x, so existiert ein $k \in D$ mit $a_k \in U$, also ist $U \cap A \neq \emptyset$. Damit ist $x \in \overline{A}$.

Sei nun $x \in \overline{A}$. Wir setzen

$$D := \{U \cap A\colon U \text{ Umgebung von } x\}$$

und ordnen D durch umgekehrte Inklusion, setzen also $B \leq C :\Longleftrightarrow C \subset B$. Dies macht D zu einer gerichteten Menge, denn sind U und V Umgebungen von x, so auch $U\cap V$ und es ist $U\cap A \leq (U\cap V)\cap A$, $V\cap A \leq (U\cap V)\cap A$. Nach Voraussetzung ist $M \neq \emptyset$ für alle $M \in D$. Es gibt also eine Auswahlfunktion $a\colon D \to X$ mit $a(M) \in M$ für alle $M \in D$. Dies ist ein Netz in A und $a \to x$, denn ist U eine Umgebung von x, so ist $M := U \cap A \in D$ und für alle $N \in D$ mit $N \geq M$ ist $a(N) \in N \subset M \subset U$. □

Bisher ist vielleicht noch nicht klar geworden, warum wir in der Definition einer gerichteten Menge gefordert haben, dass je zwei Elemente eine gemeinsame obere Schranke haben. Hätten wir das aber nicht getan, sondern beliebige Halbordnungen zugelassen, so könnten wir für einen beliebigen Raum X den Raum selbst durch Gleichheit ordnen und hätten ein „Netz" $a\colon X \to X$ mit $a_x = x$, so dass $a \to x$ für alle $x \in X$. Das wäre offenbar unerwünscht gewesen. Nun kann man über Eindeutigkeit von Grenzwerten folgendes sagen:

8.12. Proposition. *Sei X ein Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) X ist hausdorffsch.

(ii) Jedes Netz in X konvergiert gegen höchstens einen Punkt.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei $(a_k)_{k\in D}$ ein Netz, $x, y \in X$, $x \neq y$, $a \to x$. Ist X hausdorffsch, so gibt es eine Umgebung U von x und eine Umgebung V von y, so dass $U \cap V = \emptyset$. Nun gibt es ein $k \in D$, so dass $a_{k'} \in U$ für alle $k' \geq k$. Ist nun $l \in D$ beliebig, so gibt es ein $m \in D$ mit $m \geq k$ und $m \geq l$. Es ist dann $a_m \in U$, also $a_m \notin V$. Damit konvergiert a nicht gegen y.

„$\Leftarrow$" Sei X nicht hausdorffsch. Dann existieren $x, y \in X$, $x \neq y$, die sich nicht durch Umgebungen trennen lassen. Für solche x, y setzen wir

$$D := \{U \cap V : U \text{ Umgebung von } x,\, V \text{ Umgebung von } y\}\,.$$

Wir ordnen D durch umgekehrte Inklusion, das ergibt wieder eine gerichtete Menge. Da $\emptyset \notin D$ gibt es eine Auswahlfunktion $a\colon D \to X$, also ein Netz mit $a(M) \in M$ für alle $M \in D$. Ist nun U eine beliebige Umgebung von x, so ist $U = U \cap X \in D$ und $a(M) \in M \subset U$ für alle $M \in D$ mit $M \geq U$. Damit konvergiert a gegen x und ebenso gegen y. □

Häufungspunkte und Teilnetze

8.13. Definition. Sei $(a_k)_{k\in D}$ ein Netz in einem Raum X und $x \in X$. x heißt *Häufungspunkt* von a, wenn für jede Umgebung U von x und jedes $k \in D$ ein $l \in D$, $l \geq k$ mit $a_l \in U$ existiert.

Man denkt nun vielleicht, dass, wenn x ein Häufungspunkt des Netzes a ist, a ein Teilnetz besitzt, das gegen x konvergiert. Das ist auch wahr, nur dass der Begriff des Teilnetzes nicht der ist, den man vielleicht naiv angenommen hätte.

8.14. Definition. Sei $(a_k)_{k\in D}$ ein Netz in X. Ein *Teilnetz* von a ist ein Netz $(b_l)_{l\in E}$ in X zusammen mit einer kofinalen Abbildung $i\colon E \to D$, so dass $b_l = a_{i(l)}$ für alle $l \in E$. Dabei heißt hier i *kofinal*, wenn zu jedem $k \in D$ ein $l \in E$ mit $i(l') \geq k$ für alle $l' \geq l$ existiert.

Man sei hier vorsichtig mit dem Begriff ‚kofinal', der leider nicht einheitlich verwandt wird. Es ginge wohl auch, zu fordern, dass i zusätzlich monoton ist, dann ließe sich auch die Bedingung der Kofinalität leichter beschreiben. Man darf aber *nicht* fordern, dass i streng monoton ist, denn dann würde die folgende Proposition falsch.

8.15. Proposition. *Sei $(a_k)_{k\in D}$ ein Netz in X und $x \in X$. Dann ist x genau dann Häufungspunkt von a, wenn es ein Teilnetz von a gibt, das gegen x konvergiert.*

Beweis. Sei $(b_l)_{l\in E}$ mit $b_l = a_{i(l)}$ ein Teilnetz von a, das gegen x konvergiert. Sei nun $k \in D$ und U eine Umgebung von x. Da b gegen X konvergiert, gibt es ein $l \in E$, so dass $b_{l'} \in U$ für alle $l' \geq l$. Da i kofinal ist, gibt es ein $r \in E$ mit $i(r') \geq k$ für alle $r' \geq r$. Nun gibt es eine obere Schranke m von

r und l und $i(m) \geq k$ und $a_{i(m)} = b_m \in U$. Da U und k beliebig waren, ist x Häufungspunkt von a.

Sei nun andererseits x ein Häufungspunkt von $(a_k)_{k \in D}$. Wir betrachten die folgende Teilmenge von $D \times \mathcal{P}(X)$.

$$E := \{(k, U) \colon U \text{ Umgebung von } x,\, a_k \in U\}.$$

Wir ordnen E durch

$$(k, U) \leq (k', U') :\iff k \leq k' \text{ und } U' \subset U.$$

Sind nun $(k, U), (k', U') \in E$, so gibt es ein $m \in D$ mit $m \geq k$ und $m \geq k'$. Da x Häufungspunkt von a ist, gibt es dann ein $m' \geq m$ mit $a_{m'} \in U \cap U'$. Es ist dann $(m', U \cap U')$ obere Schranke von (k, U) und (k', U'), was zeigt, dass E gerichtet ist. Betrachten wir weiter

$$\begin{aligned} i \colon E &\to D \\ (k, U) &\mapsto k. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist kofinal, denn sogar ordnungserhaltend und surjektiv. Dies gibt uns das Teilnetz $(a_{i(l)})_{l \in E}$ von a. Ist nun U eine beliebige Umgebung von x, so gibt es, da x Häufungspunkt von a ist, ein $k \in D$ mit $(k, U) \in E$ für alle $l \geq (k, U)$ ist damit $a_{i(l)} \in U$. Also konvergiert das Teilnetz $(a_{i(l)})_{l \in E}$ gegen x. $\square$

Stetigkeit

Die folgenden Tatsachen über Netze werden wir nicht mehr beweisen. Die entsprechenden Tatsachen für Filter werden aber bewiesen werden.

Wie wir das von Folgen in metrischen Räumen gewohnt sind, kann man Funktionen zwischen topologischen Räumen mit Hilfe von Netzen auf Konvergenz untersuchen.

8.16. Proposition. *Seien X, Y Räume, $x \in X$ und $f \colon X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist stetig in x.

(ii) Für jedes Netz $(a_k)_{k \in D}$ in X, das gegen x konvergiert, konvergiert das Netz $(f(a_k))_{k \in D}$ gegen $f(x)$.

Beweis. Als Aufgabe 24. $\square$

Produkte und Kompaktheit

Die folgende Tatsache gibt vielleicht ein besseres Gefühl für die Produkttopologie. Diese ist nämlich die „Topologie der punktweisen Konvergenz".

8.17. Proposition. *Seien J eine Menge und X_j für $j \in J$ Räume. Dann konvergiert ein Netz $(a_k)_{k\in D}$ im Produktraum $\prod_{j\in J} X_j$ genau dann gegen einen Punkt x, wenn für jedes $j \in J$ das Netz $((a_k)_j)_{k\in D}$ in X_j gegen x_j konvergiert.*

Wir verzichten auf den Beweis, der keine Überraschungen birgt.

8.18. Proposition. *Ein Raum ist genau dann quasikompakt, wenn in ihm jedes Netz einen Häufungspunkt besitzt.*

Dass in einem quasikompakten Raum jedes Netz einen Häufungspunkt besitzt zeigt man wie die entsprechende Eigenschaft für Folgen und metrische Räume. Da der Beweis der Umkehrung zwar einfach aber vielleicht nicht offensichtlich ist, werden wir auf ihn noch zurückkommen, wenn wir die entsprechende Eigenschaft für Filter beweisen.

Wir werden später den Satz von Tychonoff beweisen, der besagt, dass beliebige Produkte quasikompakter Räume quasikompakt sind. Wollten wir die soeben vorgestellten Tatsachen zum Beweis nutzen, so hätten wir das Problem, eine Charakterisierung von Quasikompaktheit mit Hilfe von Häufungspunkten zu haben, aber keine ausreichend einfache Beschreibung von Häufungspunkten in einem Produkt. Andererseits haben wir eine gute Beschreibung von Konvergenz in einem Produktraum, aber keine passende Charakterisierung von Quasikompaktheit. Nun kennen wir einen Zusammenhang zwischen Konvergenz und Häufungspunkten, nämlich dass Häufungspunkte gerade die Grenzwerte von Teilnetzen sind, doch dieser Zusammenhang ist hier nicht stark genug. Diese Lücke werden wir füllen.