Lieferung 9

Konvergenz II: Filter

Von Netzen ...

Schauen wir uns noch einmal die Beweise an, in denen Netze konstruiert werden mussten, so sehen wir, dass die Netze alle folgende Form hatten: Die gerichtete Menge war eine Menge von nicht-leeren Teilmengen des Raumes, die durch umgekehrte Inklusion geordnet war, und die Abbildung von der gerichteten Menge in den Raum war eine zugehörige Auswahlfunktion. Eine Ausnahme bildete das Netz, das wir konstruiert haben, um zu zeigen, dass jeder Häufungspunkt eines Netzes Grenzwert eines Teilnetzes ist, das lag aber daran, dass dem Netz, von dem wir ein Teilnetz konstruieren wollten bereits eine beliebige gerichtete Menge zugrunde liegen konnte. Es liegt jedenfalls nahe, dass man auch dann eine befriedigende Konvergenztheorie erhält, wenn man nur Netze der eben beschriebenen Art zulässt. Wir wollen das nun näher untersuchen.

9.1. Proposition. *Sei X ein Raum und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{B}$ wird genau dann durch umgekehrte Inklusion zu einer gerichteten Menge, wenn*

(B1a) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ *und*

(B1b) für alle $B, B' \in \mathcal{B}$ *ein* $B'' \in \mathcal{B}$ *mit* $B'' \subset B \cap B'$ *existiert.*

Ist dies der Fall und außerdem

(B2) $\emptyset \notin B$,

so sind für $x \in X$ *die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) Für jede Auswahlfunktion $a\colon \mathcal{B} \to X$ *konvergiert das Netz* $(a_B)_{B\in\mathcal{B}}$ *gegen* x.

(ii) Zu jeder Umgebung U *von* x *existiert ein* $B \in \mathcal{B}$ *mit* $B \subset U$.

Beweis. (B1a) und (B1b) sind genaue Übersetzungen der Bedingungen an eine gerichtete Menge.

Ist $a\colon \mathcal{B} \to X$ eine Auswahlfunktion, U eine Umgebung von x und $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset U$, ist $a(B') \in B' \subset B \subset U$ für alle $B' \in \mathcal{B}$ mit $B' \supset B$. Deshalb folgt (i) aus (ii).

Ist U eine Umgebung von x, so dass $B \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B}$, so gibt es eine Auswahlfunktion $a\colon \mathcal{B} \to X$ mit $a(B) \notin U$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Da dieses $(a_B)_{B\in\mathcal{B}}$ dann nicht gegen x konvergiert, folgt (ii) aus (i). □

Sieht man sich diese Charakterisierung der Konvergenz genauer an, kommt man auf weitere Ideen. Zunächst können wir die Auswahlfunktionen ganz weglassen; dann lauert auch nicht mehr hinter jeder Proposition das Auswahlaxiom, und das freut die Mengentheoretiker. Außerdem genügt es, um Konvergenz gegen $x \in X$ zu prüfen, alle Obermengen von Elementen von $\mathcal{B}$ zu kennen, denn wir müssen ja nur wissen, ob die Umgebungen von x solche sind. Das führt uns zu den folgenden Feststellungen.

9.2. Proposition. *Sei X ein Raum, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ und*

$$\mathcal{F} := \{A \subset X\colon \textit{Es ex. } B \in \mathcal{B} \textit{ mit } A \supset B\}\,.$$

Dann erfüllt $\mathcal{B}$ genau dann die Bedingungen (B1a), (B1b) und (B2) aus Proposition 9.1, wenn $\mathcal{F}$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

(F1a) $X \in \mathcal{F}$.

(F1b) Für alle $A, A' \in \mathcal{F}$ ist $A \cap A' \in \mathcal{F}$.

(F2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Außerdem gilt nach Definition:

(F3) Für alle $A \in \mathcal{F}$ und $A' \subset X$ mit $A' \supset A$ ist $A' \in \mathcal{F}$.

Weiterhin erfüllt $\mathcal{B}$ genau dann Eigenschaft (ii) aus Proposition 9.1 für ein $x \in X$, wenn jede Umgebung von x in $\mathcal{F}$ enthalten ist. □

9.3. Bemerkung. Wir können die Bedingungen (F1a) und (F1b) auch wieder gemeinsam wie folgt formulieren.

(F1) $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten.

Dabei benutzen wir wieder $\bigcap \emptyset = X$.

… zu Filtern

Wir leiten nun aus den soeben gemachten Überlegungen einige Definitionen ab.

9.4. Definition. Sei M eine Menge. Ein *Filter* auf M ist eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(M)$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(F1a) $M \in \mathcal{F}$.

(F1b) Für alle $A, A' \in \mathcal{F}$ ist $A \cap A' \in \mathcal{F}$.

(F2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(F3) Für alle $A \in \mathcal{F}$ und $A' \subset X$ mit $A' \supset A$ ist $A' \in \mathcal{F}$.

9.5. Definition. Sei M eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter auf M. Eine *Filterbasis* von $\mathcal{F}$ ist eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(M)$, so dass

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : \text{Es ex. } B \in \mathcal{B} \text{ mit } A \supset B\}.$$

9.6. Bemerkung. $\mathcal{B}$ ist also genau dann Filterbasis von $\mathcal{F}$, wenn $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, und zu jedem $A \in \mathcal{F}$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset A$ existiert.

9.7. Definition und Proposition. Ist X ein Raum und $x \in X$, so ist die Menge aller Umgebungen von x ein Filter auf X. Diesen nennen wir den *Umgebungsfilter* von x und bezeichen ihn mit $\mathcal{U}(x)$. Eine Filterbasis des Umgebungsfilters ist gerade eine Umgebungsbasis von x.

9.8. Proposition. *Sei M eine Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(M)$. Es gibt genau dann einen Filter auf M, von dem $\mathcal{B}$ eine Filterbasis ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

(B1a) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(B1b) Für alle $B, B' \in \mathcal{B}$ existiert ein $B'' \in \mathcal{B}$ mit $B'' \subset B \cap B'$.

(B2) $\emptyset \notin B$.

Dieser Filter ist dann eindeutig bestimmt. □

9.9. Definition. Es seien M eine Menge und $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ Filter auf M. $\mathcal{F}'$ heißt eine *Verfeinerung* von $\mathcal{F}$ und *feiner* als $\mathcal{F}$, wenn $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. $\mathcal{F}'$ heißt eine *echte Verfeinerung* von $\mathcal{F}$, wenn zusätzlich $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}$.

9.10. Definition. Es sei X ein Raum, $x \in X$ und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Wir sagen, $\mathcal{F}$ konvergiere gegen x und schreiben $\mathcal{F} \to x$, wenn $\mathcal{F}$ eine Verfeinerung des Umgebungsfilters $\mathcal{U}(x)$ von x ist.

Erste Eigenschaften

Wir wollen nun sehen, dass Konvergenz von Filtern tatsächlich zur Beschreibung von topologischen Eigenschaften ausreicht. Wir beginnen mit einer Charakterisierung von Hausdorffräumen.

9.11. Proposition. *Sei X ein Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) X ist hausdorffsch.

(ii) Jedes Netz in X konvergiert gegen höchstens einen Punkt.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Seien $x, y \in X$ und $\mathcal{F}$ ein Filter, der gegen x und gegen y konvergiert, also gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{U}(y)$ ist. Ist $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$, so sind $U, V \in \mathcal{F}$, also $U \cap V \in \mathcal{F}$ und damit $U \cap V \neq \emptyset$. Ist nun X hausdorffsch, so folgt $x = y$.

„$\Leftarrow$“ Sei X nicht hausdorffsch. Dann existieren $x, y \in X$, $x \neq y$, so dass für beliebige $U \in \mathcal{U}(x)$, $V \in \mathcal{U}(y)$ gilt, dass $U \cap V \neq \emptyset$. Da $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{U}(y)$ Filter sind, folgt daraus, dass $\{U \cap V : U \in \mathcal{U}(x), V \in \mathcal{U}(y)\}$ eine Filterbasis ist. Da $\mathcal{B} \supset \mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{B} \supset \mathcal{U}(y)$, gibt es damit einen Filter, der gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{U}(y)$ ist. □

Wir notieren kurz, was wir nebenbei gezeigt haben:

9.12. Lemma. *Sei M eine Menge und $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ Filter auf M. $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ haben genau dann eine gemeinsame Verfeinerung, wenn $A \cap A' \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{F}$ und $A' \in \mathcal{F}'$.* □

Nun wollen wir gerne zeigen, dass es für $A \subset X$ und $x \in \overline{A}$ einen Filter auf A gibt, der gegen x konvergiert. Leider ergibt das keinen Sinn, da ein Filter auf A kein Filter auf X ist. Das ist ein Spezialfall (nämlich der einer Inklusionsabbildung) des Problems, das Bild eines Filter unter einer Funktion zu definieren.

9.13. Definition und Proposition. *Seien M, N Mengen, $\mathcal{F}$ ein Filter auf M und $f : M \to N$ eine Funktion. Dann ist*

$$\mathcal{B} := \{f[A] : A \in \mathcal{F}\}$$

eine Filterbasis. Den von ihr erzeugten Filter auf N nennen wir den Bildfilter *von $\mathcal{F}$ unter f und bezeichnen ihn mit $f_*(\mathcal{F})$.*

Beweis. Da $\mathcal{F} \neq \emptyset$, ist $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Da $\emptyset \notin \mathcal{F}$, ist $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Sind $A, A' \in \mathcal{F}$, so ist $A \cap A' \in \mathcal{F}$ und $f[A \cap A'] \subset f[A] \cap f[A']$. □

9.14. Proposition. *Sei X ein Raum, $A \subset X$, $i : A \to X$ die Inklusionsabbildung und $x \in X$. Dann sind äquivalent:*

(i) $x \in \overline{A}$.

(ii) Es gibt einen Filter $\mathcal{F}$ auf A, so dass $i_*(\mathcal{F}) \to x$.

Beweis. „$\Leftarrow$“ Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf A, so dass $i_*(\mathcal{F}) \to x$, und $U \in \mathcal{U}(x)$. Es ist $U \in i_*(\mathcal{F})$, also existiert ein $C \in \mathcal{F}$ mit $C = i[C] \subset U$. Da $C \subset A$ und $C \neq \emptyset$ ist $U \cap A \neq \emptyset$. Es folgt $x \in \overline{A}$.

„⇒" Sei $x \in \overline{A}$ und

$$\mathcal{F} := \{U \cap A \colon U \in \mathcal{U}(x)\}\,.$$

Da $x \in \overline{A}$ ist $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Da $\mathcal{U}(x)$ ein Filter ist, folgt daraus, dass $\mathcal{F}$ ein Filter ist. Sei nun $U \in \mathcal{U}(x)$. Da $U \supset U \cap A = i[U \cap A]$, ist $U \in i_*(\mathcal{F})$. Also $\mathcal{U}(x) \subset i_*(\mathcal{F})$, das heißt $i_*(\mathcal{F}) \to x$. □

Stetigkeit

9.15. Proposition. *Seien X, Y Räume, $x \in X$ und $f \colon X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist stetig in x.

(ii) Für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X, der gegen x konvergiert, konvergiert der Filter $f_*(\mathcal{F})$ gegen $f(x)$.

Beweis. Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, der gegen x konvergiert, also $\mathcal{F}$ feiner als $\mathcal{U}(x)$, so ist $f_*(\mathcal{F})$ feiner als $f_*(\mathcal{U}(x))$. (ii) gilt daher genau dann, wenn $f_*(\mathcal{U}(x)) \to f(x)$.

Sei nun

$$\mathcal{B} = \{f[U] \colon U \in \mathcal{U}(x)\}$$

die definierende Filterbasis von $f_*(U(x))$. Genau dann ist $f_*(\mathcal{U}(x))$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}(f(x))$, wenn zu jedem $V \in \mathcal{U}(f(x))$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset V$, also ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f[U] \subset V$ existiert. Das ist aber gerade die Stetigkeit von f in x, um genau zu sein Proposition 2.18. □

Häufungspunkte

9.16. Definition. Sei X ein Raum, $x \in X$ und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. x heißt *Häufungspunkt* von $\mathcal{F}$, wenn $U \cap A \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und $A \in \mathcal{F}$.

9.17. Proposition. *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $x \in X$. Dann ist x genau dann Häufungspunkt von $\mathcal{F}$, wenn es eine Verfeinerung von $\mathcal{F}$ gibt, die gegen x konvergiert.*

Beweis. Dies ist gerade Lemma 9.12 angewandt auf $\mathcal{F}$ und $\mathcal{U}(x)$. □

Verfeinerungen von Filtern spielen also hier genau die Rolle, die Teilnetze in der Theorie der Netze spielen.

Kompaktheit

9.18. Proposition. *Ein Raum ist genau dann quasikompakt, wenn in ihm jeder Filter einen Häufungspunkt besitzt.*

Wir bemerken zunächst:

9.19. Lemma. *Sei X ein Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) X ist quasikompakt.

(ii) Für jede Menge $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit

$$\bigcap \mathcal{E} \neq \emptyset \quad \textit{für alle endlichen } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$$

ist $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus der Definition der Quasikompaktheit durch Übergang zu Komplementen und Kontraposition. □

Beweis der Proposition. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Wir bemerken zunächst, dass

$$H := \bigcap \mathcal{H} \quad \text{mit} \quad \mathcal{H} := \{\overline{A} \colon A \in \mathcal{F}\}$$

die Menge der Häufungspunkte von $\mathcal{F}$ ist. Nun sind alle endlichen Schnitte von Elementen aus $\mathcal{H}$ nicht-leer, da ja schon alle endlichen Schnitte von Elementen von $\mathcal{F}$ nicht-leer, da selbst in $\mathcal{F}$, sind. Ist X quasikompakt, so ist also $H \neq \emptyset$.

Sei nun X nicht quasikompakt. Dann existiert eine Menge $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X, so dass wir für $\mathcal{B} := \{\bigcap \mathcal{E} \colon \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \text{ endlich}\}$ haben, dass $\emptyset \notin \mathcal{B}$ aber $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$. Da $\mathcal{B}$ offenbar unter endlichen Schnitten abgeschlossen ist, ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis. Sei nun $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter. Dann ist $\bigcap \{\overline{A} \colon A \in \mathcal{F}\} \subset \bigcap \{\overline{A} \colon A \in \mathcal{A}\} = \bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, also $\mathcal{F}$ ohne Häufungspunkte. □

Wählt man zu der im Beweis für einen nicht quasikompakten Raum konstruierten Filterbasis $\mathcal{B}$ eine Auswahlfunktion, so erhält man ein Netz ohne Häufungspunkt. Das löst das nach Proposition 8.18 gegebene Versprechen ein.

Produkte

9.20. Proposition. *Seien J eine Menge und X_j für $j \in J$ Räume. Dann konvergiert ein Filter $\mathcal{F}$ auf dem Produktraum $\prod_{j \in J} X_j$ genau dann gegen einen Punkt x, wenn für jedes $k \in J$ der Filter $(p_k)_*(\mathcal{F})$ auf X_k gegen x_k konvergiert, wobei p_k die kanonische Projektion auf X_k bezeichne.*

Beweis. Sei $x \in \prod_{j\in J} X_j$ und $\mathcal{F}$ ein Filter auf $\prod_{j\in J} X_j$. Gilt $\mathcal{F} \to x$, so auch $(p_k)_*(\mathcal{F}) \to x_k$ für alle $k \in J$, da die p_k stetig sind. Sei nun andererseits $\mathcal{F}$ derart, dass $(p_k)_*(\mathcal{F}) \to x_k$ für alle $k \in J$. Für $k \in J$ und $U \in \mathcal{U}(x_k)$ ist dann $U \in (p_k)_*(\mathcal{F})$. Damit existiert ein $A \in \mathcal{F}$ mit $p_k[A] \subset U$ also $A \subset p_k^{-1}[U]$. Es folgt $p_k^{-1}[U] \in \mathcal{F}$. Aus der Konstruktion der Initialtopologie, Proposition 5.11, siehe auch Proposition 5.28, folgt aber, dass die Menge

$$\left\{ \bigcap_{r=1}^{n} p_{k_r}^{-1}[U_r] \colon n \in \mathbb{N}, k_r \in J, U_r \in \mathcal{U}(x_{k_r}) \right\}$$

eine Umgebungsbasis von x, also eine Filterbasis von $\mathcal{U}(x)$ ist. Da $\mathcal{F}$ unter endlichen Schnitten abgeschlossen ist, enthält $\mathcal{F}$ diese Menge. Damit ist $\mathcal{F}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}(x)$. □

Am Ende des Abschnitts über Netze haben wir uns überlegt, was das Problem wäre, wenn wir den Satz von Tychonoff, der besagt, dass Produkte quasikompakter Räume quasikompakt sind, beweisen wollten. Wir sind nun in genau der selben misslichen Lage. Doch Hilfe naht …

Ultrafilter und der Satz von Tychonoff

9.21. Definition. Ein Filter heißt *Ultrafilter*, wenn er keine echte Verfeinerung besitzt.

Das Praktische an Ultrafiltern ist, dass wir nicht zwischen Grenzwerten und Häufungspunkten zu unterscheiden brauchen.

9.22. Lemma. *Sei X ein Raum, $x \in X$ und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann konvergiert $\mathcal{F}$ genau dann gegen x, wenn x Häufungspunkt von $\mathcal{F}$ ist.*

Beweis. Ein Grenzwert ist immer auch Häufungspunkt. Ist andererseits x Häufungspunkt von $\mathcal{F}$, so hat $\mathcal{F}$ nach Proposition 9.17 eine Verfeinerung, die gegen x konvergiert. Da $\mathcal{F}$ aber gar keine echte Verfeinerung besitzt, muss es sich dabei um $\mathcal{F}$ handeln. □

Wenn Ultrafilter so praktisch sind, muss man sich natürlich fragen, wie viele es davon überhaupt gibt. Glücklicherweise liefert sie uns das Zornsche Lemma in ausreichender Anzahl.

9.23. Proposition. *Jeder Filter besitzt eine Verfeinerung, die ein Ultrafilter ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge M. Wir betrachten die Menge aller Verfeinerungen von $\mathcal{F}$ und ordnen sie durch Inklusion. Die Proposition behauptet nun gerade, dass diese Halbordnung ein maximales Element besitzt. Vermöge des Zornschen Lemmas genügt es zum Beweis, zu zeigen, dass jede

Kette eine obere Schranke besitzt. Sei also $\mathcal{C}$ eine Kette. Dann ist $\mathcal{G} := \bigcup \mathcal{C}$ ein Filter: Da $\mathcal{C} \neq \emptyset$ und $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ für alle $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}$, ist $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Da $\emptyset \notin \mathcal{F}'$ für alle $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}$, ist $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Sind $A, B \in \mathcal{G}$, so existiert, da $\mathcal{C}$ eine Kette ist, ein $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}$ mit $A, B \in \mathcal{F}'$ und es ist $A \cap B \in \mathcal{F}' \subset \mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ ist also Filter und offenbar obere Schranke von $\mathcal{C}$. □

9.24. Proposition. *Sei X ein Raum. X ist genau dann quasikompakt, wenn jeder Ultrafilter auf X konvergiert.*

Beweis. Ist X quasikompakt, so hat nach Proposition 9.18 jeder Filter auf X einen Häufungspunkt, nach Lemma 9.22 ist dann also jeder Ultrafilter konvergent. Ist X derart, dass jeder Ultrafilter auf X konvergiert, so hat jeder Filter auf X nach Proposition 9.23 eine konvergente Verfeinerung, also einen Häufungspunkt. Damit ist X nach Proposition 9.18 quasikompakt. □

9.25. Proposition. *Seien M, N Mengen, $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf M und $f\colon M \to N$ eine Funktion. Dann ist $f_*(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter.*

Beweis. Sei $\mathcal{G}$ eine Verfeinerung von $f_*(\mathcal{F})$ und $B \in \mathcal{G}$. Dann ist $B \cap f[A] \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{F}$, also $A \cap f^{-1}[B] \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{F}$. Damit haben die Filter $\mathcal{F}$ und $\{A' \subset M\colon A' \supset f^{-1}[B]\}$ nach Lemma 9.12 eine gemeinsame Verfeinerung; da aber $\mathcal{F}$ Ultrafilter ist, muss $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ sein. Es ist also $B \supset f[f^{-1}[B]] \in f_*(\mathcal{F})$ und damit $B \in f_*(\mathcal{F})$. Da $B \in \mathcal{G}$ beliebig gewählt war, ist $f_*(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$, und da wiederum $\mathcal{G}$ eine beliebige Verfeinerung war, ist $f_*(\mathcal{F})$ Ultrafilter. □

9.26. Satz (Tychonoff). *Seien J eine Menge und X_j für $j \in J$ quasikompakte Räume. Dann ist auch der Produktraum $\prod_{j\in J} X_j$ quasikompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $\prod_j X_j$. Nach Proposition 9.25 sind dann auch alle $(p_j)_*(\mathcal{F})$, p_j hier wieder die kanonischen Projektionen, Ultrafilter. Da die X_j quasikompakt sind, existiert nach Proposition 9.24 zu jedem $j \in J$ ein x_j mit $(p_j)_*(\mathcal{F}) \to x_j$. Für $x = (x_j)_{j\in J}$ gilt nun nach Proposition 9.20 $\mathcal{F} \to x$. Da also jeder Ultrafilter auf $\prod_j X_j$ konvergiert, ist $\prod_j X_j$ nach Proposition 9.24 quasikompakt. □

Da dieser Beweis nun wirklich schön, kurz und konzeptionell war, hier die Bemerkung, die an dieser Stelle immer folgt: Der Satz von Tychonoff ist schwer. Die Eleganz des Beweises, die hoffentlich auch in der vorliegenden Darstellung erkennbar ist, zeugt davon, dass Konvergenz von Filtern eine gute Theorie ist.

Man beachte auch, dass wir im Beweis an zwei Stellen das Auswahlaxiom benutzt haben: Zunächst in Gestalt des Zornsches Lemmas beim Beweis von Proposition 9.23 und im eigentlichen Beweis, als wir zu jedem der Filter $(p_j)_*(\mathcal{F})$ einen Grenzwert gewählt haben. Will man den Satz von Tychonoff nur für kompakte (also hausdorffsche) Räume beweisen, so ist diese zweite

Anwendung natürlich überflüssig. Es ist bekannt, dass der Satz von Tychonoff wie wir ihn formuliert haben, also für quasikompakte Räume, zum Auswahlaxiom äquivalent ist, während Proposition 9.23 und damit die Fassung für kompakte Räume echt schwächer ist, der Satz von Tychonoff aber auch in dieser Fassung nicht in der üblichen Mengenlehre ohne Auswahlaxiom bewiesen werden kann.