10. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I“ IM WINTERSEMESTER 1999/2000

PROF. DR. BERENDT CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 28. Zeige:

(i) Sei $b > a$ und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Hat f mindestens n paarweise verschiedene Nullstellen, so hat f' mindestens $n-1$ paarweise verschiedene Nullstellen.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad höchstens n, also

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad a_k \in \mathbb{R} \text{ für alle } k.$$

Ist p nicht konstant null, dann hat p höchstens n paarweise verschiedene Nullstellen.

Bemerkung. Mit den Ideen aus Aufgabe 26 hätte man zeigen können, dass ein Polynom n-ten Grades, das nicht konstant Null ist, auch dann höchstens n Nullstellen hat, wenn man diese mit Vielfachheiten zählt. Genauer: Sind $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und ist x_k eine m_k-fache Nullstelle für alle k, so ist $\sum_{k=1}^{r} m_k \leq n$.

Aufgabe 29. Es sei $q(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 41x + 106$. Berechne alle Nullstellen von q und allen seinen Ableitungen. Wo Dir das nicht exakt möglich ist, benutze das Newtonsche Näherungsverfahren. Begründe, warum es keine weiteren Nullstellen gibt. Benenne Extrema, Wendestellen und Sattelpunkte von q. Nutze die gewonnene Information, um q und alle Ableitungen zu skizzieren.

Bemerkung. Wichtiger als Genauigkeit ist, dass an den Skizzen alle wesentlichen Eigenschaften der Funktionen erkennbar sind. Es brauchen also keine riesigen Wertetabellen erstellt zu werden.

Aufgabe 30. Berechne die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{e^x - 1}, \qquad \lim_{x\to 0} x^{-2} \sin(\cos x - 1).$$

Abgabe: am 19. 1. 2000 in der Vorlesung.