11. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I“ IM WINTERSEMESTER 1999/2000

PROF. DR. BERENDT   CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 31. Berechne nach de l'Hôpital $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ und daraus die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ und $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Bemerkung. Die Benutzung des de l'Hôpitalschen Satzes ist hier ziemlich übertrieben; wer sieht warum, der darf auch kürzer argumentieren.

Aufgabe 32. Bestimme die Taylorreihe bei 0 von $\sqrt{1-x}$ und ihren Konvergenzradius. Zeige, dass sie im Intervall $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ die Funktion darstellt, und nutze sie, um $\sqrt{0.9}$ mit einem Fehler von weniger als 10^{-4} zu berechnen.

Aufgabe 33. Zeige:

(i) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $M \in \mathbb{R}$, so dass

$$x^n \exp(-x) < \epsilon$$

für alle $x > M$.

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$x^{-n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) < \epsilon$$

für alle $x \in (0, \delta)$.

(iii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ist stetig und zweimal differenzierbar mit $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

Tipp (zu (i)). Benutze die Funktionalgleichung und die Reihendarstellung von $\exp x$.

Bemerkung.

- Die Aussagen aus (i) und (ii) formuliert man auch so:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \exp(-x) = 0, \qquad \lim_{x\searrow 0} = x^{-n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

- Wie man vielleicht bemerkt hat, ist f in der Tat beliebig oft differenzierbar und alle Ableitungen verschwinden bei 0.

Abgabe: am 26. 1. 2000 in der Vorlesung.