12. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I" IM WINTERSEMESTER 1999/2000

PROF. DR. BERENDT CARSTEN SCHULTZ

Dies ist der letzte Übungszettel zu dieser Vorlesung. Die Zusatzaufgabe ist für die besonders Interessierten und die, die noch Punkte benötigen.

Aufgabe 34. Berechne:

$$\int_0^\pi t^2 \cos t \, dt, \quad \int_0^4 \exp \sqrt{y} \, dy, \quad \int_1^{2-e} x \ln(2-x) \, dx, \quad \int_0^{2\sqrt{2}} x \sqrt{x^2+1} \, dx.$$

Aufgabe 35. Für $q \in \mathbb{R}$, $q > 0$, bestimme $\lim_{n\to\infty} \int_0^n q^x \, dx$. Beschreibe, wie man das als eine Art von Fläche interpretieren kann.

Aufgabe 36. Zeige:

(i) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1)^{2n-k}(x-1)^k \, dx = (-1)^k \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \binom{2n}{k}^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq 2n$,

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2-1)^n \, dx = (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \binom{2n}{n}^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Tipp (zu (i)). Partielle Integration, Induktion über k.

Zusatzaufgabe 1. Wie in Aufgabe 25 sei für $n \in \mathbb{N}_0$

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} h_n^{(n)}(x) \quad \text{mit} \quad h_n(x) := (x^2-1)^n.$$

Berechne $\int_{-1}^1 P_5(x) P_6(x) \, dx$ und $\int_{-1}^1 P_5(x)^2 \, dx$.

Bemerkung. Am besten ist es, mehrfach partiell zu integrieren, und dann, wenn nötig, Aufgabe 36(ii) zu verwenden. Aber natürlich kann man auch einfach alles ausrechnen und ausmultiplizieren, was allerdings etwas aufwendig sein wird.

Abgabe: am 9. 2. 2000 in der Vorlesung.