4. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I“ IM WINTERSEMESTER 1999/2000

PROF. DR. BERENDT CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 10.

(i) Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$$
gilt.

(ii) Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
$$(1+x)\cdot(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$
gilt. (Das Produkt auf der linken Seite besteht aus n Faktoren, der k-te ist $1+x^{(2^k)}$.)

Notation. Ist $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $A \subseteq X$, so bezeichnet $f|_A$ die *Einschränkung von f auf A*, also die Funktion $f|_A\colon A \to Y$, die durch $f|_A(x) := f(x)$ gegeben ist.

Aufgabe 11. Finde für die folgenden Funktionen $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils ein $D_i \subseteq \mathbb{R}$, so dass $f|_{D_i}$ injektiv ist, aber $f_i[D_i] = f_i[\mathbb{R}]$.

$$f_1(x) := x^2, \qquad f_2(x) := x^3,$$
$$f_3(x) := \sin x, \qquad f_4(x) := \text{das größte } z \in \mathbb{Z}, \text{ so dass } z \le x.$$

Aufgabe 12. Zeige, dass die folgenden Abbildungen $d_i\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Abstandsfunktionen sind. Skizziere — wenn das sinnvoll möglich ist, ansonsten beschreibe — die Mengen $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid d_i(p,(1,1)) \le \frac{1}{2}\}$ und $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid d_i(p,(1,1)) \le \frac{3}{2}\}$.

$$d_1(p,q) := \begin{cases} 0, & p = q, \\ 1, & \text{sonst}, \end{cases}$$
$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}.$$

Abgabe: am 24. 11. 1999 in der Vorlesung.