6. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I“ IM WINTERSEMESTER 1999/2000

PROF. DR. BERENDT   CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 16. Zeige per vollständiger Induktion, dass

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq -1.$$

Definition. Für $n, k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir

$$\binom{n}{k} := \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n+1-k)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

Bemerkung. Das Produkt in der Definition ist so zu verstehen, dass $\binom{n}{0} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Außerdem ist $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$, da dann im Zähler $n+1-(n+1)$ als Faktor auftaucht.

Aufgabe 17.

(i) Zeige, dass $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Zeige mittels vollständiger Induktion, dass

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Statt $a, b \in \mathbb{R}$ zu fordern, hätte man auch allgemeiner zulassen können, dass a und b Elemente eines beliebigen kommutativen Rings mit Eins sind. Der Beweis wäre derselbe gewesen.

Aufgabe 18. Zeige von jeder der beiden folgenden Funktionen entweder, dass sie an der Stelle 1 stetig ist oder dass sie dort unstetig ist. Benutze dazu direkt die Definition der Stetigkeit.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} -x+1, & x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Abgabe: am 8. 12. 1999 in der Vorlesung.