9. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I“ IM WINTERSEMESTER 1999/2000

PROF. DR. BERENDT CARSTEN SCHULTZ

Definition. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$. Wir sagen, eine in einer Umgebung von x definierte und dort $(k-1)$-fach differenzierbare Funktion f habe in x eine *k-fache Nullstelle*, wenn $f^{(i)}(x) = 0$ für alle $0 \leq i < k$.

Aufgabe 25. Es seien $k, l, n \in \mathbb{N}_0$ und $U \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ und $f, g \colon U \to \mathbb{R}$. Zeige:

(i) Sind f und g beide $(k-1)$-fach differenzierbar und ist x eine k-fache Nullstelle von f, so ist x eine k-fache Nullstelle des Produkts fg.

(ii) Sind f und g beide $(k+l-1)$-fach differenzierbar und ist x eine k-fache Nullstelle von f und eine l-fache Nullstelle von g, so ist x eine $(k+l)$-fache Nullstelle des Produkts fg.

(iii) Ist f $(kn-1)$-fach differenzierbar und ist x eine k-fache Nullstelle von f, so ist x eine kn-fache Nullstelle von f^n. (Hier ist $f^n(y) = f(y)^n$.)

Tipp (zu (ii)). Eine Möglichkeit ist eine Induktion über $k + l$.

Aufgabe 26. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist das Legendresche Polynom n-ter Ordnung $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} h_n^{(n)}(x) \quad \text{mit} \quad h_n(x) := (x^2 - 1)^n.$$

(i) Berechne P_0 bis P_3.

(ii) Zeige, dass das Legendresche Polynom n-ter Ordnung n verschiedene Nullstellen im Intervall $(-1, 1)$ besitzt.

Tipp. Welche Nullstellen hat h_n? Sind es mehrfache? Satz von Rolle, Induktion.

Aufgabe 27.

(i) Eine Kaffeerösterei setzt bei einem Preis von 18 DM pro Kilogramm 12 000 kg Kaffee im Monat ab. Sie hat durch Marktforschung festgestellt, dass der Absatz um 800 kg zunimmt, wenn der Preis um 0,50 DM gesenkt wird. Bei welchem Preis erzielt sie den maximalen Gewinn, und wie hoch ist dieser, wenn die Selbstkosten 12 DM pro Kilogramm betragen? (Wir unterstellen, dass die festgestellte Gesetzmäßigkeit bei beliebigen Preissenkungen bzw. Preiserhöhungen zutrifft.)

(ii) Orangensaft wird in Dosen abgefüllt, deren Deckflächen aus Pappe sind, während die Mantelfläche aus Metall besteht. Wie muss man die Abmessungen wählen, damit bei einem Volumen von $0,2$ Litern die Materialkosten minimal werden? Der Preis des Metalls sei fünfmal so hoch wie der der Pappe.

Abgabe: am 12. 1. 2000 in der Vorlesung.