KLAUSUR ZUR VORLESUNG „MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I“ IM WINTERSEMESTER 1999/2000

PROF. DR. BERENDT CARSTEN SCHULTZ

Die Benutzung eines Taschenrechners ist nicht erforderlich. Sie ist zulässig, sollte dann aber auch nur dazu dienen, zu entscheiden, ob Zahlen zum Beispiel größer oder kleiner als Null sind. Als Lösung einer Aufgabe wäre also „$x = \sqrt{3}$“ zu schreiben und nicht „$x \approx 1,7$“.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. Beweise, zum Beispiel durch vollständige Induktion über r: Für alle $n, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{n} = \binom{n+r+1}{n+1}.$$

Aufgabe 2. Bestimme, falls existent, $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ für die durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & b_0 &= 7, & \\ a_{n+1} &= \frac{3a_n}{5}, & b_{n+1} &= b_n + a_n & \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

gegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Aufgabe 3. Entscheide, welche der folgenden Reihen konvergent sind. Benenne die benutzten Kriterien.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3 3^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+13}{k^2-7}.$$

Aufgabe 4. Es sei die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x\exp(-x) + 1 \end{aligned}$$

gegebeben.

(i) Bestimme alle Maxima und Minima von f.
(ii) Bestimme die Zahl der Nullstellen von f.
(iii) Bestimme $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - 1}{\sin\sqrt{2} - \sin\sqrt{2+x}}$.