Abschnitt 8

Homotopien und Schleifen

Homotopie

Wir betrachten nun das Deformieren einer Abbildung in eine andere.

8.1 Definition. Seien X, Y topologische Räume und $f_0, f_1 \colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1 ist eine stetige Abbildung $F \colon X \times I \to Y$, so dass $F(x,0) = f_0(x)$ und $F(x,1) = f_1(x)$ für alle $x \in X$. Wir nennen f_0 und f_1 zu einander *homotop* und schreiben $f_0 \simeq f_1$, wenn eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 existiert.

Für die Anschauung mag es manchmal sinnvoll sein, sich F als Abbildung vom Zylinder $X \times I$ vorzustellen, und manchmal, F als eine mit der Zeit $t \in I$ variierende Schar von Funktionen

$$\begin{aligned} f_t \colon X &\to Y \\ x &\mapsto F(x,t) \end{aligned}$$

anzusehen.

8.2 Beispiel. Seien X, Y nicht-leere Räume und $f, g \colon X \to Y$ konstante Funktionen. Dann ist $f \simeq g$ genau dann, wenn die Bilder von f und g in der selben Wegzusammenhangskomponente von Y liegen.

8.3 Beispiel. Sei $n \geq 0$ und

$$\begin{aligned} r \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,, \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Dann ist $r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ wie die Homotopie

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I &\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,, \\ (x,t) &\mapsto \frac{x}{(1-t)\|x\| + t} \end{aligned}$$

zeigt.

8.4 Proposition. *Seien X, Y Räume. Die Relation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Funktionen von X nach Y.*

Beweis. Es seien $f, g, h\colon X \to Y$ stetig.

Die stetige Funktion

$$\begin{aligned} X \times I &\to Y \\ (x,t) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

zeigt $f \simeq f$ und damit die Reflexivität von $\simeq$.

Ist $f \simeq g$ und F eine Homotopie zwischen f und g, so ist mit

$$\begin{aligned} r\colon I &\to I \\ t &\mapsto 1-t \end{aligned}$$

$F \circ (\mathrm{id}_X \times r)$ eine Homotopie zwischen g und f, also $g \simeq f$, was die Symmetrie von $\simeq$ zeigt.

Ist $f \simeq g$ und $g \simeq h$ und mit zugehörigen Homotopien F und G, so ist

$$\begin{aligned} X \times I &\to Y \\ (x,t) &\mapsto \begin{cases} F(x,2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x,2t-1), & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen f und h. Für die wohldefiniert beachte, dass $F(x,1) = g(x) = G(x,0)$ und für die Stetigkeit, dass $X \times [0, \frac{1}{2}]$ und $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ in $X \times I$ abgeschlossen sind. Dies zeigt $f \simeq h$ und die Transitivität von $\simeq$. □

Die Komposition von Abbildungen respektiert die Äquivalenzrelation Homotopie:

8.5 Proposition. *Seien X, Y, Z Räume und $f, f'\colon X \to Y$, $g, g'\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen. Ist $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$, so ist $g \circ f \simeq g' \circ f'$.*

Beweis. Ist F eine Homotopie zwischen f und f', so ist $g \circ f$ eine Homotopie zwischen $g \circ f$ und $g \circ f'$. G eine Homotopie zwischen g und g', so ist $G \circ (f' \times \mathrm{id}_I)$ eine Homotopie zwischen $g \circ f'$ und $g' \circ f'$. Es ist also $g \circ f \simeq g \circ f' \simeq g' \circ f'$. □

Homotopie relativ zu einem Unterraum

8.6 Definition. Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Wir sagen, f sei *relativ zu A homotop* zu g, $f \simeq g$ rel A, wenn eine Homotopie $F\colon X \times I \to Y$ zwischen f und g existiert, so dass $F(a,t) = F(a,0)$ für alle $a \in A$, $t \in I$.

Damit $f \simeq g$ rel A gelten kann, muss natürlich $f|_A = g|_A$ erfüllt sein.

8.7 Beispiel. In Beispiel 8.3 ist $r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \text{ rel } \mathbb{S}^{n-1}$.

8.8 Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$. Dann ist Homotopie relativ zu A eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Man wiederhole den Beweis, den wir oben für $A = \emptyset$ gegeben haben. □

Ebenso verallgemeinern wir:

8.9 Proposition. *Seien X, Y, Z Räume, $A \subset X$ und $f, f' \colon X \to Y$, $g, g' \colon Y \to Z$ stetige Abbildungen. Ist $f \simeq f' \text{ rel } A$ und $g \simeq g' \text{ rel } f[A]$, so ist $g \circ f \simeq g' \circ f' \text{ rel } A$.* □

Nützlich ist auch die folgende Tatsache.

8.10 Proposition. *Seien X ein Raum, $A \subset X$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f, g \colon X \to Y$. Ist $f|_A = g|_A$ und Y konvex, so ist $f \simeq g \text{ rel } A$.*

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned} H \colon X \times I &\to Y \\ (x, \lambda) &\mapsto (1-\lambda) f(x) + \lambda g(x). \end{aligned}$$

Es ist $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Außerdem ist $H(a,\lambda) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$, $\lambda \in I$. □

8.11 Beispiel. Ist X ein Raum und sind $w, w' \colon I \to X$ stetige Wege mit gleichem Anfangspunkt, also $w(0) = w'(0)$, so ist $w \simeq w' \text{ rel } \{0\}$: Ist $c_0 \colon I \to I$ die Abbildung, die konstant 0 ist, so ist nämlich, da I konvex ist, $c_0 \simeq \mathrm{id}_I \text{ rel } \{0\}$ und daher

$$\begin{aligned} w &= w \circ \mathrm{id}_I \\ &\simeq w \circ c_0 \text{ rel } \{0\} \\ &= w' \circ c_0 \\ &\simeq w' \circ \mathrm{id}_I \text{ rel } \{0\} \\ &= w'. \end{aligned}$$

Andererseits scheint auch offensichtlich, dass für

$$\begin{aligned} w \colon I &\to \mathbb{S}^1, & w' \colon I &\to \mathbb{S}^1 \\ s &\mapsto (\cos s\pi, \sin s\pi) & s &\mapsto (\cos s\pi, -\sin s\pi), \end{aligned}$$

also zwei Wege in von $(1,0)$ nach $(-1,0)$ in $\mathbb{S}^1$, wobei einer oben, der andere unten entlang geht, gilt, dass

$$w \not\simeq w' \text{ rel } \{0,1\},$$

dass es also nicht möglich ist, den einen Weg in den anderen zu überführen, wenn man beide Endpunkte festhält. Das ist auch in der Tat wahr, wir werden aber noch einiges an Vorbereitung benötigen, um das zu zeigen.

Wir defnieren nun noch eine Klasse von Räumen, die aus der Sicht der Homotopietheorie trivial sind.

8.12 Definition. Sei X ein Raum. Wir sagen X sei *zusammenziehbar*, wenn $X \neq \emptyset$ und die Identitäbsabbildung id_X homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

8.13 Beispiel. Nicht-leere konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind zusammenziehbar.

Beispiele von nicht zusammenziehbaren Räumen anzugeben, fällt uns schwerer. Die Sphären $\mathbb{S}^n$ sind nicht zusammenziehbar, aber für $n > 0$ können wir das noch nicht zeigen. Immerhin haben wir:

8.14 Proposition. *Sei X ein zusammenziehbarer Raum. Dann ist X wegzusammenhängend.*

Beweis. Sei $H\colon X \times I \to X$ eine Homotopie, die zeigt, dass X zusammenziehbar ist, also $H(x, 0) = x$ für alle x und $H(x, 1) = x_1$ für alle x und ein $x_1 \in X$. Ist nun $x \in X$ beliebig, so ist $H(x, \bullet)$ ein Weg von x zu x_1, also liegen x und x_1 in der selben Wegzusammenhangskomponente. Damit hat X genau eine Wegzusammenhangskomponente. □

Wege

8.15 Definition. Seien X ein Raum und $w, w'\colon I \to X$ Wege in X mit $w(1) = w'(0)$. Wie bei der Diskussion des Wegzusammenhangs bezeichnen wir mit w^- den Weg

$$\begin{aligned} w^-\colon I &\to X \\ t &\mapsto w(1-t) \end{aligned}$$

und mit $w * w'$ den Weg

$$\begin{aligned} w * w'\colon I &\to X \\ t &\mapsto \begin{cases} w(2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ w'(2t-1), & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Außerdem bezeichnen wir für $x \in X$ mit c_x den konstanten Weg

$$\begin{aligned} c_x\colon I &\to X \\ t &\mapsto x, \end{aligned}$$

der in $\{x\}$ verläuft.

8.16 Proposition. *Seien X, Y Räume, $f\colon X \to Y$ stetig, $w, w'\colon I \to X$ stetig mit $w(1) = w'(0)$. Dann ist $(f\circ w)(1) = (f\circ w')(0)$ und $(f\circ w)*(f\circ w') = f\circ(w * w')$.* □

8.17 Proposition. *Sind $v, v', w, w'\colon I \to X$ stetig mit $v(1) = w(0)$, und ist $v \simeq v'$ rel $\{0,1\}$, $w \simeq w'$ rel $\{0,1\}$, so ist $v * w \simeq v' * w'$ rel $\{0,1\}$.*

Beweis. Sei F die Homotopie zwischen v und v', G die Homotopie zwischen w und w'. Dann ist

$$\begin{aligned} I \times I &\to X \\ (s,t) &\mapsto \begin{cases} F(2s,t), & s \le \frac{1}{2}, \\ G(2s-1,t), & s \ge \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen $v * w$ und $v' * w'$, und diese Homotopie hält $\{0,1\}$ (sogar $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$) fest. □

8.18 Proposition. *Sei X ein Raum, $w, w', w''\colon I \to X$ stetig, $w(1) = w'(0)$, $w'(1) = w''(0)$. Dann gilt:*

(i) $(w * w') * w'' \simeq w * (w' * w'') \quad \text{rel } \{0,1\}$,

(ii) $c_{w(0)} * w \simeq w \simeq w * c_{w(1)} \quad \text{rel } \{0,1\}$,

(iii) $w * w^- \simeq c_{w(0)} \quad \text{rel}\{0,1\}$.

Beweis. Zu (i): Man kann die Homotopie direkt angeben, und das sei zur Übung empfohlen. Wir gehen hier etwas anders vor: Wir definieren zunächst

$$\begin{aligned} f\colon [0,3] &\to X \\ s &\mapsto \begin{cases} w(s), & 0 \le s \le 1, \\ w'(s-1), & 1 \le s \le 2, \\ w''(s-2), & 2 \le s \le 3, \end{cases} \end{aligned}$$

f ist stetig, und für $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} l_{a,b}\colon I &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto s \cdot b + (1-s) \cdot a. \end{aligned}$$

Dann ist zum Beispiel $w' = f \circ l_{1,2}$, also $(w * w') * w'' = f \circ ((l_{0,1} * l_{1,2}) * l_{2,3})$ und $w * (w' * w'') = f \circ (l_{0,1} * (l_{1,2} * l_{2,3}))$. Wegen Proposition 8.9 genügt es nun, zu zeigen, dass

$$(l_{0,1} * l_{1,2}) * l_{2,3} \simeq l_{0,1} * (l_{1,2} * l_{2,3}) \quad \text{rel } \{0,1\},$$

beide Seiten aufgefasst als Wege in $[0,3]$. Da beide Wege Anfangspunkt 0 und Endpunkt 3 haben, folgt dies aber mit Proposition 8.10 aus der Konvexität von $[0,3]$.

Zu (ii): Es ist $c_{w(0)} * w = w \circ (c_0 * \mathrm{id}_I)$ und $w = w \circ \mathrm{id}_I$. Nun sind $c_0 * \mathrm{id}_I$ und id_I beides Wege in I mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt 1 und $c_{w(0)} * w \simeq w$ rel $\{0,1\}$ folgt wie eben, und $w \simeq w * c_{w(1)}$ rel $\{0,1\}$ ebenso.

Zu (iii): Wie eben mit $w * w^- = w \circ (l_{0,1} * l_{1,0})$, $c_{w(0)} = w \circ c_0$. □

Die Fundamentalgruppe

Diese Untersuchungen machen die folgende Definition möglich.

8.19 Definition. Sei X ein Raum und $x_0 \in X$. Dann bezeichnen wir mit $\pi_1(X, x_0)$ die Menge der Äquivalenzklassen von stetigen Wegen $w\colon I \to X$ mit $w(0) = w(1) = x_0$ bezüglich Homotopie relativ zu $\{0,1\}$. Einen Weg w mit $w(0) = w(1) = x_0$ nennen wir einen *geschlossenen Weg bei* x_0 oder eine *Schleife bei* x_0.

Auf $\pi_1(X, x_0)$ ist durch

$$[w] \cdot [w'] := [w * w']$$

eine Multiplikation erklärt, die $\pi_1(X, x_0)$ zu einer Gruppe mit neutralem Element $[c_{x_0}]$ macht. $\pi_1(X, x_0)$ heißt die *Fundamentalgruppe* von X mit *Basispunkt* x_0.

8.20 Definition. Ein *Raum mit Basispunkt* ist ein Paar (X, x_0), wobei X ein Raum ist und $x_0 \in X$. Sind (X, x_0), (Y, y_0) Räume mit Basispunkt, so heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ *basispunkterhaltend*, wenn $f(x_0) = y_0$. Wir schreiben hierfür $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Sind $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ basispunkterhaltende Abbildungen, so werden wir unter einer Homotopie zwischen f und g, wenn wir nichts anderes bemerken, immer eine Homotopie relativ zu $\{x_0\}$ verstehen. Wollen wir explizit sagen, dass eine Homotopie nicht relativ zum Basispunkt zu sein braucht, so reden wir von einer *freien Homotopie.*

8.21 Definition und Proposition. *Seien (X, x_0) und (Y, y_0) Räume mit Basispunkt, $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ stetig. Dann definieren wir*

$$\begin{aligned} \pi_1(f)\colon \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [w] &\mapsto [f \circ w]. \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert und ein Homomorphismus von Gruppen. An Stelle von $\pi_1(f)$ schreiben wir auch $f_\#$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit folgt aus Proposition 8.9, die Verträglichkeit mit der Multiplikation aus Proposition 8.16. □

8.22 Proposition. *Seien (X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0) Räume mit Basispunkt, $f, f' \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $g \colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ stetig. Dann gilt:*

(i) Ist $f \simeq f'$ (relativ zu $\{x_0\}$), so ist $\pi_1(f) = \pi_1(f')$.

(ii) Es ist $\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(iii) Es ist $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$.

Beweis. (i) folgt aus Proposition 8.9, (ii) und (iii) sind klar. □

Die Fundamentalgruppe erlaubt es uns, topologische Situationen in algebraische zu übersetzen, wobei man dann hofft, dass letztere einfacher sind. Zum Beispiel hat man:

8.23 Proposition. *Seien (X, x_0) und (Y, y_0) Räume mit Basispunkt und $f \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ und $g \colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ stetige Abbildungen. Gelten $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,x_0)}$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(Y,y_0)}$, so ist $f_\# \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Aus $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,x_0)}$ folgt $g_\# \circ f_\# = (g \circ f)_\# = (\mathrm{id}_{(X,x_0)})_\# = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$. Aus $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(Y,y_0)}$ folgt, dass $f_\# \circ g_\# = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$. Das heißt gerade, dass $f_\#$ ein Isomorphismus und invers zu $g_\#$ ist. □

8.24 Beispiel. Sei $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ und $i \colon (\mathbb{S}^{n-1}, x_0) \to (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0)$ die Inklusion. Wir haben in Beispiel 8.3 eine Abbildung $r \colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0) \to (\mathbb{S}^{n-1}, x_0)$ angegeben, so dass $r \circ i = \mathrm{id}_{(\mathbb{S}^{n-1},x_0)}$ und $i \circ r \simeq \mathrm{id}_{(\mathbb{R}^n \setminus \{0\},x_0)}$, es ist also $i_\# \colon \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}, x_0) \to \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0)$ ein Isomorphismus mit inverser Abbildung $r_\#$.

In Proposition 8.23 müssen wir bei den Abbildungen und Homotopien die Basispunkte beachten, wir werden später sehen, dass sich das in diesem Fall umgehen lässt. Für den Spezialfall, dass Y ein einpunktiger Raum ist, tun wir das jetzt schon direkt.

8.25 Proposition. *Sei X zusammenziehbar und $x_0 \in X$. Dann ist $\pi_1(X, x_0)$ eine triviale Gruppe.*

Beweis. Sei w eine Schleife bei x_0. Wir zeigen, dass $[w] = [c_{x_0}] = e$. Sei dazu H eine Homotopie von id_{x_0} zu einer konstanten Abbildung. Wir betrachten $G := H \circ (w \times \mathrm{id}_I) \colon I \times I \to X$. Setzen wir $p := H(x_0, \bullet)$, $x_1 := p(1)$, so ist $G(0, \bullet) = G(1, \bullet) = p$, $G(\bullet, 0) = w$, $G(\bullet, 1) = c_{x_1}$. Sind also $i, j \colon I \to I \times I$ die Wege

$$i(t) := (t, 0), \qquad j(t) := \begin{cases} (0, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (4t-2, 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 34, \\ (1, 4-4t) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

so ist $G \circ i = w$ und $G \circ j = p * (c_{x_1} * p^-)$. Da $i(0) = (0,0) = j(0)$, $i(1) = (1,0) = j(1)$ und $I \times I$ konvex ist, ist $i \simeq j$ rel $\{0,1\}$. Es folgt

$$\begin{aligned} w &= G \circ i \\ &\simeq G \circ j && \text{rel } \{0,1\} \\ &= p * (c_{x_1} * p^-) \\ &\simeq p * p^- && \text{rel } \{0,1\} \\ &\simeq c_{x_0} && \text{rel } \{0,1\} \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Bisher wissen wir nicht einmal, dass es einen Raum gibt, dessen Fundamentalgruppe nicht trivial ist, und ohne dieses Wissen kann diese Theorie nicht hilfreich sein. Unser nächstes Ziel wird daher sein, die Fundamentalgruppe von $\mathbb{S}^1$ zu bestimmen und zu zeigen, dass sie nicht trivial ist. Später werden wir dann noch Hilfsmittel kennenlernen, um die Fundamentalgruppen vieler Räume zu bestimmen.