

Topologie

Vorlesungsskript
Carsten Schultz

Fachbereich Mathematik
TU Berlin

Berlin, Wintersemester 2008/2009

Inhaltsverzeichnis

1 Räume und Homöomorphie	5
Metrische Räume	5
Homöomorphie	6
Offene Mengen	9
Die Kategorie topologischer Räume	11
Mehr Mengen	13
Mehr Stetigkeit	14
Unterräume und das Produkt zweier Räume	16
2 Erste topologische Eigenschaften: Zusammenhang und Kompaktheit	20
Zusammenhang	20
Komponenten	22
Wegzusammenhang	23
Kompaktheit	25
Produkte	27
Metrische Räume	28
3 Initialtopologien und Produkte	31
Initialtopologien	31
Unterräume	32
Produkte	32
Beispiel: Das Cantorsche Diskontinuum	34
Abzählbares	36
4 Konvergenz, Filter und der Satz von Tychonoff	39
Folgen	39
Filter	40
Erste Eigenschaften	42
Stetigkeit	43
Häufungspunkte	43
Kompaktheit	44
Initialtopologien	44
Ultrafilter und der Satz von Tychonoff	46

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	3
5 Trennen durch Mengen und Funktionen	48
Trennungsaxiome	48
Definitionen und erste Eigenschaften 48	Beispiele 49
Vererbung 50	
Reellwertige Funktionen	51
Normale Räume 51	Vollständig reguläre Räume 54
6 Kompaktifizierungen	57
Kompaktifizierungen	57
Lokale Kompaktheit und die Ein-Punkt-Kompaktifizierung	59
Die Stone-Čech-Kompaktifizierung	61
Konstruktion 61	Funktorialität 61
Universelle Eigenschaft 63	Die Stone-Čech-Kompaktifizierung eines diskreten Raumes 63
Bemerkungen 65	
7 Finaltopologien und Quotienten	66
Finaltopologien	66
Spezialfälle	67
Quotienten 67	Summen 68
Äquivalenzrelationen	68
Das Zusammenschlagen von Unterräumen	70
Projektive Räume	72
Definition und erste Eigenschaften 72	Eine andere Darstellung 73
Projektive Räume zerteilt 73	
Verkleben	76
Quotienten und Produkte	77
8 Homotopien und Schleifen	79
Homotopie	79
Homotopie relativ zu einem Unterraum	80
Wege	82
Die Fundamentalgruppe	84
9 Die Fundamentalgruppe des Kreises	87
Überlagerungen und die Fundamentalgruppe von \mathbb{S}^1	87
Der Brouwersche Fixpunktsatz	91
Abbildungsgrad und der Hauptsatz der Algebra	93
10 Mehr Fundamentalgruppe	95
Weitere Eigenschaften der Fundamentalgruppe	95
Der Einfluss des Basispunktes 95	Homotopieäquivalenz 96
Freie Homotopie und die Fundamentalgruppe 97	

Der Satz von Seifert und van Kampen	98
Ein erster Schritt 98 $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$, erster Teil 99 Freie Produkte 101 Push-Out-Diagramme 102 Die Formulierung des Satzes 104	
11 Anwendungen und Beweis des Satzes von Seifert und van Kampen	106
Die Fundamentalgruppen der Torusknoten	106
Der Effekt des Anheftens von Zellen auf die Fundamentalgruppe	109
Das Anheften einer Zelle 109 Der Effekt auf die Fundamentalgruppe 111 Projektive Räume 113	
Beweis des Satzes von Seifert und van Kampen	114
Ein weiterer Blick auf Push-Outs	117
12 Simplicialkomplexe	119
Abstrakte Simplicialkomplexe und Triangulierungen	119
Die Komponenten eines Simplicialkomplexes	121
Die Fundamentalgruppe eines Simplicialkomplexes	123
13 Homologie I	127
Definition der Homologiegruppen	127
\tilde{H}_{-1}	130
\tilde{H}_0 und H_0	131
H_1	132
14 Homologie II: Abbildungen	136
Die Homologie eines Simplex	136
Simpliciale Abbildungen und Kettenabbildungen	137
Simpliciale Abbildungen 138 Kettenabbildungen 139	
Topologische Invarianz	141
Kettenhomotopien	142
15 Homologie III: Homotopieinvarianz, Eulercharakteristik und lange exakte Sequenzen	144
Homotopieinvarianz	144
Die Euler-Charakteristik	145
Exakte Sequenzen	147
Die Mayer–Vietoris–Sequenz	150
16 Literatur	153

Abschnitt 1

Räume und Homöomorphie

Metrische Räume

Eine ebenso richtige wie nichtssagende Antwort auf die Frage, was denn Topologie sei, wäre „das Studium stetiger Abbildungen.“ Stetigkeit kennen wir bisher als Eigenschaft von Funktionen zwischen Teilmengen des euklidischen Raums oder allgemeiner zwischen metrischen Räumen.

1.1 Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Funktion $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

- (i) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$ (*Symmetrie*),
- (iii) $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y)$ für alle $x, y, z \in X$ (*Dreiecksungleichung*).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf ihr.

Wir werden den metrischen Raum (X, d) nur mit X bezeichnen, wenn keine Verwechslungsmöglichkeit besteht.

1.2 Beispiele und Definitionen.

- ▷ Der *euklidische Raum* \mathbb{R}^n mit der Metrik $d(x, y) = (\sum_k (x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}}$ ist wohl der metrische Raum, den wir am besten kennen. Wenn wir von dem \mathbb{R}^n als metrischen Raum reden, ohne näher die Metrik zu bestimmen, werden wir immer diese meinen.
- ▷ Ist (X, d) ein metrischen Raum und $Y \subset X$, so ist auch $(Y, d|_{Y \times Y})$ ein metrischer Raum. Insbesondere können wir also jede Teilmenge eines euklidischen Raumes als metrischen Raum auffassen.
- ▷ Eine beliebige Menge X wird durch die *diskrete Metrik*

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

zu einem (nicht sehr spannenden, aber durchaus wichtigen) metrischen Raum.

1.3 Definition (Stetigkeit). Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Ist $x \in X$, so heißt f *stetig in x* , wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, ein $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt, dass $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist.

Für ein paar wichtige Teilmengen von euklidischen Räumen legen wir Bezeichnungen fest.

1.4 Notation. Es sei

$$I := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$$

das Einheitsintervall und für $n \in \mathbb{N}$

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

die n -dimensionale Scheibe (auch Ball oder Kugel genannt) und

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

die n -dimensionale Sphäre, wobei $\|\bullet\|$ die euklidische Norm bezeichne.

Homöomorphie

In der Topologie betrachtet man Räume meist nur bis auf Homöomorphie, eine Äquivalenzrelation, die wir jetzt definieren.

1.5 Definition. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen heißt ein *Homöomorphismus*, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g = \text{id}_Y$, $g \circ f = \text{id}_X$. Zwei Räume X und Y heißen *homöomorph*, $X \approx Y$, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Etwas direkter ausgedrückt ist ein Homöomorphismus also eine stetige Bijektion, deren Umkehrfunktion auch stetig ist.

1.6 Beispiel. Man betrachte $I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \in I \text{ für alle } k\}$. Die Abbildung

$$I^n \rightarrow D^n$$

$$x \mapsto \begin{cases} 2 \frac{x - (1/2, 1/2, \dots, 1/2)}{\|x - (1/2, 1/2, \dots, 1/2)\|} \max_k |x_k - 1/2|, & x \neq (1/2, 1/2, \dots, 1/2), \\ 0, & x = (1/2, 1/2, \dots, 1/2), \end{cases}$$

ist ein Homöomorphismus mit inverser Abbildung

$$D^n \rightarrow I^n$$

$$x \mapsto (1/2, 1/2, \dots, 1/2) + \begin{cases} \frac{x}{2 \max_k |x_k|} \|x\|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

wie man durch Nachrechnen feststellt.

1.7 Beispiel. Die Abbildung

$$[0, 2\pi) \rightarrow S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$x \mapsto (\sin x, \cos x)$$

ist stetig und bijektiv, aber *kein* Homöomorphismus, denn die Umkehrabbildung ist bei $(0, 1) \in S^1$ unstetig. In der Tat sind $[0, 2\pi)$ und S^1 nicht homöomorph; um das zu zeigen, könnte man die Kompaktheit von S^1 ausnutzen, oder dass $[0, 2\pi)$ einen Randpunkt hat, S^1 aber nicht, oder dass S^1 nie in zwei Teile zerfällt, wenn man einen Punkt herausnimmt, oder... Zu alledem später mehr.

1.8 Beispiel. Man betrachte einen Doughnut¹ und eine Kaffeetasse als Unterräume des \mathbb{R}^3 . Diese sind homöomorph, wie wir jetzt andeuten wollen. Zunächst schlagen wir von der Tasse den Henkel ab, markieren aber auf beiden Teilen die Bruchstelle. Ebenso schneiden wir den Doughnut so in zwei Teile, dass jeder von ihnen wie ein Henkel aussieht. Nun gibt es schon einmal einen Homöomorphismus von dem Tassenhenkel zu der einen Doughnuthälfte, der Bruchstelle auf Schnittstelle abbildet. Die zweite Doughnuthälfte ist ein (gebogener) Zylinder, also, da wir ja bereits in Beispiel 1.6 gesehen haben, dass Kanten nichts ausmachen, ein Ball. Von dem von der Tasse übriggebliebenen Becher bemerken wir, dass er auch bis auf Homöomorphie nichts anderes ist als ein Ball, auch wenn er recht platt ist und gebogen im \mathbb{R}^3 liegt. Nun gibt es zwischen diesen beiden Stücken also wieder einen Homöomorphismus, und zwar sogar einen, der wieder Bruchstelle auf Schnittstelle abbildet. Das ganze lässt sich so einrichten, dass die beiden Homöomorphismen an der Bruch- beziehungsweise Schnittstelle zusammenpassen und so einen Homöomorphismus von der Tasse zum Doughnut liefern.

1.9 Beispiel. Den Doughnut aus dem letzten Beispiel nennen wir üblicherweise den Volltorus, seinen Rand den Torus. Als Rotationskörper im \mathbb{R}^3 erhält man sie zum Beispiel als

$$\{(x \sin \phi, x \cos \phi, y) : (x, y, \phi) \in \mathbb{R}^3, (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

¹Man verzeihe die Amerikanisierung. Natürlich gibt es auch deutsches Gebäck gleicher Form, und das schmeckt sicher auch zu Kaffee.

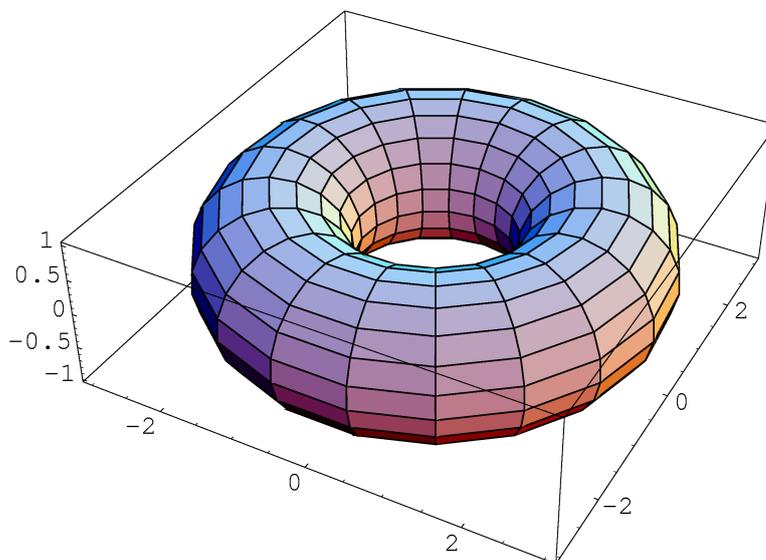


Abbildung 1.1: Torus in Mathematica

für den Volltorus und

$$\{(x \sin \phi, x \cos \phi, y) : (x, y, \phi) \in \mathbb{R}^3, (x-2)^2 + y^2 = 1\}$$

für den Torus, man vergleiche mit Abbildung 1.1, die die Mathematica-Ausgabe für

```
ParametricPlot3D[
  {Sin[phi](Sin[rho] + 2), Cos[phi](Sin[rho] + 2), Cos[rho]},
  {phi, 0, 2Pi}, {rho, 0, 2Pi}]
```

zeigt. Hier wurde also auch noch $\{(x, y) : (x-2)^2 + y^2 = 1\}$ durch $(\sin \rho + 2, \cos \rho)$ parametrisiert.

Natürlicher jedoch erhält man zu diesen homöomorphe Räume als Teilmengen des $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, nämlich den Volltorus als $S^1 \times D^2$ und den Torus als $S^1 \times S^1$. Ein Homöomorphismus ist in beiden Fällen die Einschränkung der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto ((x_3 + 2)x_1, (x_3 + 2)x_2, x_4) \end{aligned}$$

und die Umkehrabbildung die Einschränkung von

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2, x_3 \right) \end{aligned}$$

Das Nachrechnen ist lästig, aber elementar.

1.10 Beispiel. Ist X eine Menge, auf der zwei Metriken d und d' definiert sind, und gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass $d'(x, y) \leq Cd(x, y)$ für alle $x, y \in X$, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} i: (X, d) &\rightarrow (X, d') \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

stetig (setze $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$); gibt es außerdem ein $C' > 0$, so dass $d(x, y) \leq C'd'(x, y)$, so ist i ein Homöomorphismus. Dies lässt sich auf die Metriken $d_p(x, y) := (\sum_k |x_k - y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$ und $d_\infty(x, y) := \max_k |x_k - y_k|$ auf \mathbb{R}^n anwenden, die also alle homöomorphen Räume liefern, denn es ist ja

$$d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y) \leq d_1(x, y) \leq nd_\infty(x, y).$$

1.11 Beispiel. Die Abbildung $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus, denn sie ist stetig und hat die stetige Umkehrabbildung \arctan .

Das letzte Beispiel zeigt, dass Vollständigkeit keine Eigenschaft ist, die von einem Homöomorphismus erhalten bleibt: \mathbb{R} ist vollständig, aber das offene beschränkte Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ nicht. Das liegt daran, dass stetige Abbildungen im allgemeinen Cauchy-Folgen nicht auf Cauchy-Folgen werfen.

Die letzten beiden Beispiele zeigen, dass eine Metrik viel mehr Information trägt, als man wirklich braucht, wenn man nur an Eigenschaften interessiert ist, die unter Homöomorphie erhalten bleiben. Eine wesentlichere Rolle als die Metrik selbst werden die offenen Mengen spielen, die von ihr bestimmt werden.

Offene Mengen

1.12 Definition. Sei X ein metrischer Raum. Für $\varepsilon > 0$ ist die ε -Umgebung eines Punktes $x \in X$ die Menge $B_\varepsilon(x) := \{x' \in X : d(x, x') < \varepsilon\}$. Eine beliebige Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x , wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *offen*, wenn sie Umgebung eines jeden der Punkte ist, die sie enthält.

1.13 Bemerkungen.

- ▷ Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort, dass $B_\varepsilon(x)$ offen ist.
- ▷ Wir haben den Begriff der offenen Menge mit Hilfe des Begriffes der Umgebung definiert. Andersherum gilt: Eine Menge U ist Umgebung von x , wenn eine offene Menge O existiert, so dass $x \in O \subset U$. Beachte, dass wir, im Gegensatz zu einigen älteren Autoren, nicht fordern, dass U selbst offen ist.

1.14 Beispiel. Ist X mit der diskreten Metrik versehen, so gilt für jedes $x \in X$, dass $B_{1/2}(x) = \{x\}$ ist, also ist $\{x\}$ und damit jede Menge, die x enthält, eine Umgebung von x und jede Teilmenge von X offen.

Um stetige Abbildungen zu beschreiben, genügt es völlig, die offenen Mengen der beteiligten Räume zu kennen.

1.15 Proposition. Seien X, Y metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) f ist stetig.

(ii) Für jede offene Menge $U \subset Y$ ist auch $f^{-1}[U]$ offen.

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei f stetig und $U \subset Y$ offen. Sei $x \in f^{-1}[U]$, also $f(x) \in U$. Da U offen ist, gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nun ein $\delta > 0$, so dass $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x))$. Das heißt, dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}[U]$; also ist, da x beliebig gewählt war, $f^{-1}[U]$ offen.

„ \Leftarrow “: Sei f nicht stetig. Dann existiert ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta > 0$ ein $x' \in B_\delta(x)$ gibt, so dass $f(x') \notin B_\varepsilon(f(x))$. Es gibt also kein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ wäre. $f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ ist also keine Umgebung von x und damit nicht offen, obwohl $B_\varepsilon(f(x))$ offen ist. \square

1.16 Korollar. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn f bijektiv ist und für alle Mengen $M \subset X$ gilt, dass $f[M]$ genau dann offen ist, wenn M offen ist. \square

Die offenen Mengen sind also tatsächlich, worauf es ankommt, wenn man Räume bis auf Homöomorphie betrachtet. Die folgenden Eigenschaften der Familie der offenen Mengen eines metrischen Raumes sind so fundamental, dass wir sie bald zu Definitionen erheben werden.

1.17 Proposition. In einem metrischen Raum X gilt:

(i) Der Schnitt einer endlichen Menge von offenen Mengen ist offen.

(ii) Die Vereinigung einer beliebigen Menge von offenen Mengen ist offen.

(iii) Sind $x, y \in X$ und ist $x \neq y$, so existieren offene Mengen $U, V \subset X$ mit $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

Beweis. Zu (i): Seien U_1, \dots, U_r offen, $r \in \mathbb{N}$, und sei $x \in \bigcap_k U_k$. Dann gibt es $\varepsilon_k > 0$, so dass $B_{\varepsilon_k}(x) \subset U_k$. Mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_k\}$ ist $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_k U_k$.

Zu (ii): Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$, und U offen für alle $U \in \mathcal{U}$. Sei nun $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $x \in U$, und damit ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U \subset \bigcup \mathcal{U}$.

Zu (iii): Ist $x \neq y$, so ist $\varepsilon := d(x, y)/2 > 0$. Sei nun $z \in B_\varepsilon(x)$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung $z \notin B_\varepsilon(y)$. Also ist $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$. \square

Die Kategorie topologischer Räume

Wir haben gesehen, dass es, wenn man Räume — das waren bisher metrische Räume — bis auf Homöomorphie betrachtet nur auf die offenen Mengen ankommt und haben angekündigt, die Eigenschaften aus Proposition 1.17 zu Axiomen zu machen. Das geschieht nun.

1.18 Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Teilmenge \mathcal{T} der Potenzmenge von X , so dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Für alle $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$ ist $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{T}$.
- (ii) Sind $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcap_{k=1}^n O_k \in \mathcal{T}$.

Eine Teilmenge von X heißt *offen*, wenn sie in \mathcal{T} enthalten ist. Ein *topologischer Raum* ist eine Paar (X, \mathcal{T}) bestehend aus einer Menge X und einer Topologie \mathcal{T} auf ihr.

1.19 Bemerkung. Häufig fordert man auch noch $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$, aber das ist in obigem bereits enthalten: Es ist $\emptyset \subset \mathcal{T}$ und $\bigcup \emptyset = \emptyset$, außerdem $0 \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{k=1}^0 O_k = \bigcap \emptyset = X$.

Wie auch schon bei metrischen Räumen werden wir den topologischen Raum (X, \mathcal{T}) nur mit X bezeichnen, wenn keine Verwechslungsmöglichkeit besteht.

Eine der Eigenschaften, die wir in Proposition 1.17 festgestellt haben, fehlt noch.

1.20 Definition. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *hausdorffsch* und damit ein *Hausdorff-Raum* oder auch *T_2 -Raum*, wenn zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$, $x_0 \neq x_1$, Mengen $O_0, O_1 \in \mathcal{T}$ mit $x_i \in O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$ existieren.

Das T in T_2 kommt daher, dass es sich um eine Trennungseigenschaft handelt: Je zwei verschiedene Punkte können durch offene Mengen getrennt werden. Die 2 in T_2 verspricht, dass es derer noch mehr gibt.

Die nächste Definition ist durch Proposition 1.15 motiviert.

1.21 Definition. Es seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Eine *stetige Abbildung* $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist eine Funktion $f: X \rightarrow Y$, so dass $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_X$ für alle $O \in \mathcal{T}_Y$.

Trivial, aber so wichtig, dass wir es notieren:

1.22 Proposition. Ist X ein topologischer Raum, so ist die Identität id_X eine stetige Abbildung. Sind X, Y, Z topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen, so ist die Komposition $g \circ f: X \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung.

Beweis. Es ist $\text{id}^{-1}[O] = O$ und $(g \circ f)^{-1}[O] = f^{-1}[g^{-1}[O]]$. \square

Und schließlich wiederholen wir in diesem neuen Kontext die Definition der Homöomorphie.

1.23 Definition. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ein *Homöomorphismus*, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g = \text{id}_Y$, $g \circ f = \text{id}_X$. Zwei Räume X und Y heißen *homöomorph*, $X \approx Y$, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert.

Homöomorphie war bei metrischen Räumen nur eine von mehreren sinnvollen Äquivalenzrelationen, und eine recht schwache noch dazu, das heißt eine, die einiges an Information ignorierte. Bei topologischen Räumen hingegen ist Homöomorphie eine sehr natürliche Äquivalenzrelation, in gewisser Weise die stärkstmögliche sinnvolle Äquivalenzrelation. Insbesondere ist, wenn \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 Topologien auf derselben Menge X sind, die Funktion

$$\begin{aligned} i: (X, \mathcal{T}_1) &\rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

genau dann ein Homöomorphismus, wenn $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Nun ist es aber Zeit für ein paar Beispiele. Eigentlich jedoch war der letzte Teil schon voll von ihnen:

1.24 Beispiel und Definition. Ist X eine Menge und d eine Metrik auf X , so bilden die bezüglich d offenen Teilmengen von X eine Topologie auf X , die *von der Metrik d induzierte Topologie*. Diese Topologie ist hausdorffsch. Ist Y ein weiterer metrischer Raum, so ist eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ genau dann stetig als Abbildung zwischen metrischen Räumen, wenn sie es als Abbildung zwischen den induzierten topologischen Räumen ist.

1.25 Beispiele und Definitionen. Ist X eine Menge, so ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ selbst eine Topologie, die *diskrete Topologie*. Wir haben bereits in Beispiel 1.14 gesehen, dass sie von der diskreten Metrik induziert wird.

$\{\emptyset, X\}$ ist ebenfalls eine Topologie auf X , sie wird manchmal die *indiskrete Topologie* oder auch anschaulicher die *Klumpentopologie* genannt. Hat X mindestens zwei Elemente, so ist sie nicht hausdorffsch, also gibt es keine Metrik, die diese Topologie induzieren würde.

Wir werden später auch Hausdorff-Räume kennenlernen, die von keiner Metrik induziert werden. Überhaupt kann man sich fragen, wie die topologischen Räume charakterisiert werden können, die von einer Metrik induziert werden, die also, wie man sagt, *metrisierbar* sind. Wir werden diese Frage später teilweise beantworten.

1.26 Beispiel. Ist X eine beliebige Menge, so bilden all die Teilmengen von X , deren Komplemente endlich sind zusammen mit der leeren Menge eine Topologie auf X (Nachrechnen!), die *kofinite Topologie*.

Ist X unendlich, so ist auch die kofinite Topologie auf X nicht hausdorffsch. Nun scheint das wieder eine sehr „komische“, nur zum Konstruieren von Gegenbeispielen geeignete Topologie zu sein. Das täuscht aber, denn in der Tat geben algebraische Geometer gerne der eindimensionalen Linie diese Topologie.² Wir tun also gut daran, nicht nur Hausdorff-Räume zu betrachten.

Mehr Mengen

Wir definieren nun für Teilmengen topologischer Räume ein paar Eigenschaften und Operationen, die zumindest für Teilmengen des \mathbb{R}^n schon aus der Analysis-Grundvorlesung bekannt sein sollten.

1.27 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge von X heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist.

Da Schnitte von Komplementen Komplemente von Vereinigungen und umgekehrt sind, folgt sofort aus der Definition eines topologischen Raumes.

1.28 Proposition. Sei X ein topologischer Raum, dann gilt:

- (i) *Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*
- (ii) *Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

Ist X eine Menge, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, und ist die Menge $\{A \subset X : X - A \in \mathcal{T}\}$ abgeschlossen gegenüber beliebigen Schnitten und endlichen Vereinigungen, so ist \mathcal{T} eine Topologie auf X . \square

Eine Topologie kann also genau so gut wie durch Angabe der offenen Mengen durch Angabe der abgeschlossenen Mengen definiert werden.

1.29 Beispiel. In einem mit der kofiniten Topologie versehenen Raum ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie endlich oder gleich dem ganzen Raum ist. Dass dies eine Topologie ist, liegt also im wesentlichen daran, dass Schnitte endlicher Mengen endlich sind und ebenso endliche Vereinigungen endlicher Mengen.

Was wir in Bemerkung 1.13 für Umgebungen in metrischen Räumen festgestellt haben, machen wir wieder zur Definition.

1.30 Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x , wenn eine offene Menge O existiert, so dass $x \in O \subset U$.

²Dies ist ein sehr spezieller Fall der Zariski-Topologie.

1.31 Definitionen und Propositionen. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$.

$$\text{int } A := \bigcup \{U \subset A : U \text{ offen}\}$$

ist die größte in A enthaltene offene Menge und heißt das *Innere* von A .

$$\bar{A} := \bigcap \{C \subset X : A \subset C, C \text{ abgeschlossen}\}$$

ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält und heißt der *Abschluss* von A .

$$\partial A := \bar{A} - \text{int } A$$

heißt der *Rand* von A .

Ein Punkt $x \in X$ heißt *innerer Punkt* von A , wenn $x \in \text{int } A$, *Berührungspunkt* von A , wenn $x \in \bar{A}$ und *Randpunkt* von A , wenn $x \in \partial A$.

An dieser Stelle sei es den StudentInnen ans Herz gelegt, die verschiedenen ihnen bereits bekannten Charakterisierungen und Eigenschaften dieser Begriffe aus diesen Definitionen herzuleiten.

1.32 Definitionen. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *dicht*, wenn $\bar{A} = X$, *nirgends dicht*, wenn $\text{int } \bar{A} = \emptyset$.

Mehr Stetigkeit

Wir haben Stetigkeit bisher nur global definiert. Von metrischen Räumen her kennen wir auch den lokalen Begriff der Stetigkeit in einem Punkt.

1.33 Definition. Seien X, Y topologische Räume, $x \in X$ und $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. f heißt *stetig in x* , wenn für jede Umgebung U von $f(x)$ das Urbild $f^{-1}[U]$ eine Umgebung von x ist.

Wir bemerken:

1.34 Proposition. *Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist.* \square

Eine einfache Umformulierung der Definition ist

1.35 Proposition. *Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen ist in $x \in X$ genau dann stetig, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x gibt, so dass $f[U] \subset V$.*

Beweis. Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Ist f in x stetig, so ist $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x , und es ist $f[f^{-1}[V]] \subset V$. Existiert andererseits eine Umgebung U von x mit $f[U] \subset V$, so ist $U \subset f^{-1}[V]$ und auch $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x . \square

Für metrische Räume stimmen diese Definitionen mit denen überein, die wir bereits hatten.

1.36 Proposition. *Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, $x \in X$ und $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Seien außerdem \mathcal{T}_{d_X} und \mathcal{T}_{d_Y} die von den Metriken induzierten Topologien. Dann sind äquivalent:*

- (i) $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ ist stetig in x .
- (ii) $f: (X, \mathcal{T}_{d_X}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{d_Y})$ ist stetig in x .

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(f(x)) \subset V$. Nun existiert ein $\delta > 0$, so dass $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset V$.

„ \Leftarrow “: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von x , so dass $f[U] \subset B_\varepsilon(f(x))$. Nun gibt es wiederum ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$, also $f[B_\delta(x)] \subset B_\varepsilon(f(x))$. \square

Wir schauen uns den Beweis noch einmal an: Die ε - δ -Definition der Stetigkeit ist fast genau die Beschreibung in Proposition 1.35, nur dass sie nur ε -Umgebungen anstelle beliebiger zulässt. Da es aber genügend viele ε -Umgebungen gibt, macht das keinen Unterschied. Wir formalisieren nun dieses „genügend viele“.

1.37 Definition. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine *Umgebungsbasis* von x ist eine Menge \mathcal{B} von Umgebungen von x , so dass es zu jeder Umgebung U von x ein $V \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $V \subset U$.

Was wir also soeben die folgende Tatsache benutzt.

1.38 Proposition. *Ist X ein metrischer Raum und $x \in X$, so ist die Menge $\{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis von x .* \square

Und eigentlich haben wir das folgende gezeigt.

1.39 Proposition. *Es seien X, Y topologische Räume, $x \in X$, $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Sei außerdem \mathcal{B} eine Umgebungsbasis von x , \mathcal{B}' eine Umgebungsbasis von $f(x)$. Dann ist f in x genau dann stetig, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{B}'$ ein $U \in \mathcal{B}$ gibt, so dass $f[U] \subset V$.* \square

Das ist typisch: Anstatt eine Eigenschaft für alle Umgebungen eines Punktes nachzuprüfen, genügt es häufig, dies nur für alle Elemente einer Umgebungsbasis zu tun.

Man lasse sich nicht von dem Wort *Umgebungsbasis* verwirren. Vergleicht man die Situation mit Vektorräumen, so entspricht das eher einem Erzeugendensystem. Zum Beispiel ist ja immer die Menge aller Umgebungen eines Punktes eine Umgebungsbasis.

Unterräume und das Produkt zweier Räume

Eine Teilmenge eines topologischen Raumes wird auf natürliche Art selbst zu einem topologischen Raum.

1.40 Definition und Proposition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist $\{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf Y , die *Unterraumtopologie*. Y versehen mit der Unterraumtopologie heißt ein *Unterraum* von X .

Die Unterraumtopologie ist gerade so gemacht, dass die Inklusionsabbildung stetig wird. Um das besser formulieren zu können, führen wir zwei Begriffe ein.

1.41 Definition. Seien X eine Menge und $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X . \mathcal{T}_1 heißt *gröber* als \mathcal{T}_2 und \mathcal{T}_2 *feiner* als \mathcal{T}_1 , wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

1.42 Proposition. Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so ist die Unterraumtopologie die größte Topologie auf Y , so dass die Inklusionsabbildung $i: Y \rightarrow X$ stetig ist. \square

Wir notieren noch eine weitere einfache aber wichtige Eigenschaft.

1.43 Proposition. Seien X, Z topologische Räume, $Y \subset X$ mit der Unterraumtopologie versehen und $i: Y \rightarrow X$ die Inklusion. Eine Funktion $f: Z \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $i \circ f$ stetig ist.

Beweis. Ist f stetig, so auch $i \circ f$, da i stetig ist. Sei nun $i \circ f$ stetig und $U \subset Y$ offen. Dann gibt es eine offene Menge $O \subset X$ mit $U = O \cap Y$, also $U = i^{-1}[O]$. Es folgt, dass $f^{-1}[U] = f^{-1}[i^{-1}[O]] = (i \circ f)^{-1}[O]$ offen ist. \square

Eine weitere wichtige Konstruktion ist das Produkt von Räumen. Wir werden Produkte —auch unendlich vieler Räume— später noch genauer behandeln, daher begnügen wir uns hier mit dem Produkt zweier Räume.

Mengen der Form $U \times V$ sollten für offene U, V offen sein; diese bilden allerdings noch keine Topologie, da die Vereinigung zweier Mengen dieser Form nicht wieder von dieser Form zu sein braucht. Wir müssen also Vereinigungen auch noch hinzunehmen. Wir machen dies nun systematisch.

1.44 Definition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine *Basis* der Topologie \mathcal{T} ist eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, so dass jede offene Menge Vereinigung von Elementen aus \mathcal{B} ist, so dass also $\mathcal{T} = \{\bigcup M : M \subset \mathcal{B}\}$ gilt.

Da eine Basis offenbar die Topologie bestimmt, kann man die Topologie beschreiben, indem man eine Basis angibt. Dabei ist es hilfreich, zu wissen, wann eine gegebene Familie von Teilmengen Basis einer Topologie ist.

1.45 Proposition. Sei X eine Menge, und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Ist \mathcal{B} abgeschlossen unter endlichen Schnitten, so ist $\{\bigcup M : M \subset \mathcal{B}\}$ eine Topologie auf X mit Basis \mathcal{B} . \square

1.46 Bemerkung. Die Voraussetzung in dieser Proposition kann noch abgeschwächt werden, wir brauchen das aber im Moment nicht.

Wir sind nun bereit, das Produkt zweier topologischer Räume zu definieren.

1.47 Definition. Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Die *Produkttopologie* auf $X \times Y$ ist die Topologie mit der Basis

$$\{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

$X \times Y$ versehen mit dieser Topologie heißt das *Produkt* der Räume (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) .

Wenn nichts anderes gesagt ist, werden wir immer davon ausgehen, dass $X \times Y$ die Produkttopologie trägt.

Noch bevor wir Produkte genauer untersuchen, können wir feststellen:

1.48 Proposition. Das Produkt zweier Hausdorffräume ist hausdorffsch.

Beweis. Seien X, Y Hausdorffräume, $(x, y), (x', y') \in X \times Y$, $(x, y) \neq (x', y')$. Dann ist $x \neq x'$ oder $y \neq y'$, oBdA $x \neq x'$. Seien U, U' disjunkte Umgebungen von x beziehungsweise x' . Dann sind $U \times Y$ und $U' \times Y$ disjunkte Umgebungen von (x, y) beziehungsweise (x', y') . \square

Zur Vorbereitung noch ein weiterer Begriff.

1.49 Definition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine *Subbasis* der Topologie \mathcal{T} ist eine Familie von offenen Mengen $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, so dass jede offene Menge Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen von \mathcal{S} ist, so dass also $\{\bigcap_{k=1}^n O_k : n \in \mathbb{N}, O_k \in \mathcal{S}\}$ eine Basis von \mathcal{T} ist.

Wir bemerken kurz:

1.50 Proposition. Ist X eine Menge, so ist jede Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ eine Subbasis einer Topologie auf X .

Beweis. $\{\bigcap_{k=1}^n O_k : n \in \mathbb{N}, O_k \in \mathcal{S}\}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen und daher nach Proposition 1.45 die Basis einer Topologie. \square

Doch nun weiter.

1.51 Proposition. Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Dann ist die Menge

$$\{O \times Y : O \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times O : O \in \mathcal{T}_Y\}$$

eine Subbasis der Produkttopologie auf $X \times Y$. \square

1.52 Proposition. Seien X, Y topologische Räume und

$$\begin{array}{ll} p_1: X \times Y \rightarrow X & p_2: X \times Y \rightarrow Y \\ (x, y) \mapsto x & (x, y) \mapsto y \end{array}$$

die kanonischen Projektionen. Die Produkttopologie ist die größte Topologie auf $X \times Y$, so dass p_1 und p_2 stetig sind.

Beweis. p_1 ist genau dann stetig, wenn $p_1^{-1}[O] = O \times Y$ für alle offenen $O \subset X$ offen ist. Ebenso ist p_2 genau dann stetig, wenn alle $X \times O, O \subset Y$ offen, offen sind. Nun ist eine Topologie offenbar genau dann die größte, in der diese Mengen offen sind, wenn diese Mengen eine Subbasis von ihr bilden. \square

Um Stetigkeit nachzuprüfen, genügt es, eine Subbasis zu betrachten:

1.53 Proposition. Seien X, Y topologische Räume und \mathcal{S} eine Subbasis der Topologie von Y . Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}[O]$ für alle $O \in \mathcal{S}$ offen ist.

Beweis. „ \Rightarrow “ ist klar, denn alle $O \in \mathcal{S}$ sind offen. „ \Leftarrow “: Sei $U \subset Y$ offen. Dann gibt es eine Indexmenge $I, n_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in I$ und $O_{ik} \subset \mathcal{S}$ für alle $i \in I, 1 \leq k \leq n_i$, so dass $U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} O_{ik}$. Nun ist $f^{-1}[O_{ik}]$ für alle i, k offen. Damit ist auch

$$f^{-1}[U] = f^{-1} \left[\bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} O_{ik} \right] = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} f^{-1}[O_{ik}]$$

offen. \square

1.54 Proposition. Seien X, Y topologische Räume, dann ist die Produkttopologie die feinste Topologie auf $X \times Y$, so dass für alle topologischen Räume Z und alle stetigen Abbildungen $f: Z \rightarrow X$ und $g: Z \rightarrow Y$ die Abbildung

$$\begin{array}{l} (f, g): Z \rightarrow X \times Y \\ z \mapsto (f(z), g(z)) \end{array}$$

stetig ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $X \times Y$ mit der Produkttopologie diese Eigenschaft hat. Dazu genügt es nach Proposition 1.53, Urbilder von Elementen einer Subbasis zu betrachten. Sei daher U ein beliebiges Element der Subbasis aus Proposition 1.51, etwa $O \times Y$ mit $O \subset X$ offen. Nun ist $(f, g)^{-1}[U] = (f, g)^{-1}[O \times Y] = f^{-1}[O]$ offen, da f stetig ist.

Bezeichnen wir nun die Produkttopologie mit \mathcal{T} und nehmen wir an, \mathcal{T}' sei eine weitere Topologie auf $X \times Y$ der Eigenschaft aus der Proposition. Wir betrachten die Abbildung

$$i: (X \times Y, \mathcal{T}) \rightarrow (X \times Y, \mathcal{T}') \\ x \mapsto x.$$

Es ist $i = (p_1, p_2)$ und nach Proposition 1.52 sind p_1 und p_2 stetig. Nach der Voraussetzung an \mathcal{T}' ist also i stetig. Das heißt aber gerade, dass $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. \square

Die Propositionen 1.52 und 1.54 ergeben zusammen eine wichtige Charakterisierung der Produkttopologie.

1.55 Korollar. *Seien X, Y Räume. Die Produkttopologie ist die einzige Topologie auf $X \times Y$, die die folgenden Eigenschaften gleichzeitig erfüllt:*

- (i) *Die kanonischen Projektionen auf die Faktoren sind stetig.*
- (ii) *Für einen beliebigen Raum Z und stetige Abbildungen $f: Z \rightarrow X$ und $g: Z \rightarrow Y$ ist die Abbildung $(f, g): Z \rightarrow X \times Y$ stetig.*

\square

Abschnitt 2

Erste topologische Eigenschaften: Zusammenhang und Kompaktheit

Zusammenhang

2.1 Definition. Ein Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn er außer X und \emptyset keine Teilmengen hat, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

Ein Raum X ist also genau dann nicht zusammenhängend, wenn er sich als disjunkte Vereinigung $A \cup B$ nicht-leerer offener (oder abgeschlossener) Mengen schreiben lässt. Man beachte, dass die Topologie auf X in diesem Fall vollständig von den Unterraumtopologien auf A und B bestimmt wird, denn $U \subset X$ ist dann genau dann offen, wenn $U \cap A$ und $U \cap B$ offen sind. Man kann in dieser Situation tatsächlich oft A und B einzeln betrachten.

2.2 Beispiele.

- ▷ Ein diskreter Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn er nur einen Punkt hat.
- ▷ $\mathbb{R} - \{0\}$ ist nicht zusammenhängend, wie die Zerlegung $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ zeigt.

Ein nicht-triviales Beispiel eines zusammenhängenden Raumes liefert die folgende Charakterisierung.

2.3 Proposition. *Sei X ein Raum. Dann sind äquivalent:*

- (i) X ist zusammenhängend.
- (ii) Ist $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sind $y, y', m \in \mathbb{R}$ mit $y, y' \in \text{im } f$, $y < m < y'$, dann ist auch $m \in \text{im } f$.

Beweis. „ \Rightarrow “ Seien f, y, y', m wie in der Proposition. Dann sind die Mengen $f^{-1}[(-\infty, m)]$ und $f^{-1}[(m, \infty)]$ disjunkte offene und nicht-leere Teilmengen von X . Da X zusammenhängend ist, kann die Vereinigung dieser beiden Mengen nicht ganz X sein, also ist $m \in \text{im } f$.

„ \Leftarrow “ Sei $X = A \cup B$ eine Zerlegung in disjunkte offene Mengen. Dann ist die Funktion

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} -1, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

stetig. Da $0 \notin \text{im } f$, können 1 und -1 nicht beide im Bild von f liegen. Also ist A oder B leer. \square

Einen zusammenhängenden Raum kennen wir also aus Analysis I.

2.4 Proposition (Zwischenwertsatz). *Das Einheitsintervall I ist zusammenhängend.* \square

Auf eine Wiedergabe des aus dem ersten Semester bekannten Beweises verzichten wir, bemerken aber, dass die Vollständigkeit von \mathbb{R} wesentlich war.

Im Beweis von Proposition 2.3 haben wir nebenbei schon fast gezeigt, dass stetige Bilder zusammenhängender Räume zusammenhängend sind.

2.5 Proposition. *Seien X, Y Räume, X zusammenhängend und $f: X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv. Dann ist Y zusammenhängend.*

Beweis. Sei $Y = A \cup B$ eine Zerlegung in disjunkte offene Teilmengen. Dann ist $X = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ und $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = f^{-1}[A \cap B] = \emptyset$, und da f stetig ist, sind $f^{-1}[A]$ und $f^{-1}[B]$ offen. Da X zusammenhängend ist, ist $f^{-1}[A] = \emptyset$ oder $f^{-1}[B] = \emptyset$. Aus der Surjektivität von f folgt $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. \square

Nun noch zwei Propositionen, die später nützlich sein werden.

2.6 Proposition. *Ist X ein Raum und $D \subset X$ dicht und zusammenhängend, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Sei $A \subset X$ offen-abgeschlossen und nicht-leer. Da A offen und nicht-leer und D dicht ist, ist $A \cap D \neq \emptyset$. Da D zusammenhängend und $A \cap D$ offen-abgeschlossen in D ist, ist nun $A \cap D = D$, also $D \subset A$. Damit ist auch A dicht in X . Da A abgeschlossen ist, ist $A = X$. \square

2.7 Proposition. *Sei X ein Raum und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Sind alle $M \in \mathcal{M}$ zusammenhängend und ist $X = \bigcup \mathcal{M}$, $M \cap M' \neq \emptyset$ für alle $M, M' \in \mathcal{M}$, so ist X zusammenhängend.*

Beweis. Sei $A \subset X$ offen-abgeschlossen. Dann ist $A \cap M$ offen-abgeschlossen in M für alle $M \in \mathcal{M}$. Sei nun $A \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $M \in \mathcal{M}$ mit $A \cap M \neq \emptyset$. Da M zusammenhängend ist, ist $A \cap M = M$. Für beliebiges $M' \in \mathcal{M}$ ist nun $\emptyset \neq M \cap M' \subset A \cap M'$, also, da M' zusammenhängend ist, $A \cap M' = M'$. Damit ist $A = X$. \square

Komponenten

Wir wollen nun einen gegebenen Raum X als disjunkte Vereinigung zusammenhängender Unterräume darstellen. Man könnte nun hoffen, dass dies immer so möglich sei, dass jeder dieser Unterräume zugleich offen und abgeschlossen ist. Dies wird aber im allgemeinen nicht möglich sein, wie schon das Beispiel $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup \{0\}$ zeigt: Jeder Unterraum mit mehr als einem Punkt ist nicht zusammenhängend, denn das größte Element kann von dem Rest durch eine offen-abgeschlossene Menge getrennt werden. Andererseits ist aber $\{0\}$ nicht offen in X .

Um dennoch jeden Raum als disjunkte Vereinigung möglichst großer zusammenhängender Teilräume darzustellen, betrachten wir die folgende Äquivalenzrelation.

2.8 Definition. Sei X ein Raum. Wir definieren auf X eine Relation \sim_z durch

$$p \sim_z q : \iff$$

Es gibt einen zusammenhängenden Unterraum $Z \subset X$ mit $p, q \in Z$.

2.9 Proposition. \sim_z ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Zur Reflexivität bemerke, dass einelementige Unterräume zusammenhängend sind. Symmetrie ist klar. Die Transitivität folgt aus Proposition 2.7. \square

2.10 Definition. Die Äquivalenzklassen der Relation \sim_z heißen die *Zusammenhangskomponenten* oder kurz *Komponenten* des Raumes.

2.11 Proposition. Sei X ein Raum.

- (i) Die Komponenten von X sind nicht-leer, und X ist disjunkte Vereinigung seiner Komponenten.
- (ii) Jede zusammenhängende Teilmenge von X ist in einer Komponente enthalten.
- (iii) Die Komponenten sind abgeschlossen und zusammenhängend.

Die Komponenten sind also maximal zusammenhängende Teilmengen.

Beweis. (i) folgt daraus, dass \sim_z eine Äquivalenzrelation ist, (ii) direkt aus der Definition von \sim_z . Sei nun K eine Komponente und $x \in K$. K ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen, die x enthalten. Nach Proposition 2.7 ist K zusammenhängend. Da nach Proposition 2.6 der Abschluss von K ebenfalls zusammenhängend ist, muss nach dem bisher gezeigten K selbst abgeschlossen sein. Damit ist auch (iii) gezeigt. \square

2.12 Beispiel. Die Komponenten von $\mathbb{R} - \{0\}$ sind $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$.

2.13 Beispiel. Obiger Diskussion ist zu entnehmen, dass jede einelementige Teilmenge von $\{1/n : n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup \{0\}$ eine Komponente ist. Dieser Raum enthält also mit $\{0\}$ eine Komponente, die nicht offen ist.

Das Verständnis der Komponenten vereinfacht den Beweis des folgenden Satzes.

2.14 Proposition. *Sind X und Y zusammenhängende Räume, so ist auch $X \times Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Seien (x, y) und (x', y') beliebige Punkte von $X \times Y$. Da $\{x\} \times Y \approx Y$ zusammenhängend ist, liegen (x, y) und (x, y') in der selben Komponente von $X \times Y$. Da $X \times \{y'\}$ zusammenhängend ist, liegen (x, y') und (x', y') in der selben Komponente. Damit liegen (x, y) und (x', y') in der selben Komponente, und da sie beliebig gewählt waren, hat $X \times Y$ nicht mehr als eine Komponente. \square

Eine Situation, in der die Zerlegung in Komponenten besonders angenehm ist, ist die folgende.

2.15 Definition. Ein Raum heißt *lokal zusammenhängend*, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden Umgebungen besitzt.

2.16 Proposition. *Die Komponenten eines lokal zusammenhängenden Raumes sind offen-abgeschlossen.*

Beweis. Sei K eine Komponente und $x \in K$. Dass K abgeschlossen ist, haben wir bereits gezeigt. Nun besitzt x eine zusammenhängende Umgebung. Diese muss in K enthalten sein, also ist K selbst Umgebung von x . Da x beliebig gewählt war, ist K offen. \square

Wegzusammenhang

Ein anderer wichtiger Zusammenhangsbegriff ist der des Wegzusammenhangs. Wir gehen nun etwas schneller vor und definieren gleich die entsprechende Äquivalenzrelation.

2.17 Definition. Sei X ein Raum. Wir definieren eine Relation \sim_w durch

$$p \sim_w q : \iff$$

Es existiert eine stetige Abbildung $w : I \rightarrow X$ mit $w(0) = p$, $w(1) = q$.

Eine solche Abbildung w heißt ein *Weg von p nach q* .

2.18 Proposition. \sim_w ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Seien $p, q, r \in X$. Der konstante Weg

$$\begin{aligned} c_p: I &\rightarrow X \\ t &\mapsto p \end{aligned}$$

zeigt $p \sim_w p$ und damit die Reflexivität. Sei nun $p \sim_w q$ und w ein Weg von p nach q . Dann ist

$$\begin{aligned} w^-: I &\rightarrow X \\ t &\mapsto w(1-t) \end{aligned}$$

ein Weg von q nach p , was $q \sim_w p$ und die Symmetrie zeigt. Sei schließlich zusätzlich $q \sim_w r$ und w' ein Weg von q nach r . dann ist

$$\begin{aligned} w * w': I &\rightarrow X \\ t &\mapsto \begin{cases} w(2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ w'(2t-1), & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

ein Weg von p nach r , was $p \sim_w r$ und die Transitivität zeigt. \square

2.19 Definition. Sei X ein Raum. Die Äquivalenzklassen bezüglich \sim_w heißen die *Wegzusammenhangskomponenten* oder *Wegkomponente* von X . Ein Raum heißt *wegzusammenhängend*, wenn er nicht mehr als eine Wegzusammenhangskomponente besitzt.

2.20 Proposition. Sei X ein Raum. Ist X wegzusammenhängend, so auch zusammenhängend.

Beweis. Seien $p, q \in X$ beliebig. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $w: I \rightarrow X$ von p nach q . Da nach Proposition 2.4 I zusammenhängend ist, ist nach Proposition 2.5 auch $w[I]$ zusammenhängend, also liegen p und q in der gleichen Komponente. Damit hat X nicht mehr als eine Zusammenhangskomponente. \square

Dass die Umkehrung im allgemeinen nicht gilt, macht man sich als Übung an dem Beispiel $\{0\} \times [-1, 1] \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ klar.

2.21 Definition. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn ein $v \in X$ existiert, so dass für alle $p \in X$ und $s \in I$ auch $sv + (1-s)p \in X$.

2.22 Proposition. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist X wegzusammenhängend.

Beweis. Sei $v \in X$ wie in Definition 2.21 und $p \in X$ beliebig. Dann ist $p \sim_w v$. \square

2.23 Korollar. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so ist X wegzusammenhängend. \square

2.24 Definition. Ein Raum heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Umgebungen besitzt.

2.25 Proposition. *Die Wegzusammenhangskomponenten eines lokal wegzusammenhängenden Raumes sind offen-abgeschlossen und stimmen mit den Zusammenhangskomponenten überein.*

Beweis. Sei K eine Wegzusammenhangskomponente und $x \in K$. Nun existiert eine wegzusammenhängende Umgebung U von x . Da $x' \sim_w x$ für alle $x' \in U$, ist $U \subset K$. Damit ist K offen. Da das Komplement von K aber die Vereinigung aller anderen Wegzusammenhangskomponenten ist, ist das Komplement von K auch offen. Damit ist K offen-abgeschlossen.

Nun ist, da die Wegzusammenhangskomponenten zusammenhängend sind, jede Zusammenhangskomponente disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten. Da die Zusammenhangskomponenten selbst zusammenhängend und die Wegzusammenhangskomponenten offen-abgeschlossen sind, kann keine Zusammenhangskomponente disjunkte Vereinigung von mehr als einer Wegzusammenhangskomponente sein. \square

Kompaktheit

Den Begriff der Kompaktheit muss man wohl für jemanden, der eine Analysisvorlesung gehört hat, nicht weiter motivieren. Für uns ist es nur wichtig, aus den verschiedenen Charakterisierungen, die dort kennengelernt wurden und die für Teilmengen des \mathbb{R}^n äquivalent sind, die richtige als Definition herauszupicken.

2.26 Definition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Überdeckung* (von X), wenn $\bigcup \mathcal{C} = X$, *offene Überdeckung*, wenn zusätzlich $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$. Eine Teilmenge einer Überdeckung, die selbst Überdeckung ist, heißt *Teilüberdeckung*.

2.27 Definition. Sei X ein topologischer Raum. X heißt *quasikompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Der Raum X heißt *kompakt*, wenn er quasikompakt und hausdorffsch ist.

Häufig werden quasikompakte Räume schon kompakt genannt, man lasse also beim Literaturstudium Vorsicht walten.

Auch wenn wir sie erst später benutzen werden, notieren wir eine weitere Definition.

2.28 Definition. Sei X ein Raum. X heißt *lokal kompakt*, wenn X hausdorffsch ist und jeder Punkt von x eine kompakte Umgebung besitzt.

Da schon bekannt sein sollte, wann Unterräume von euklidischen Räumen kompakt sind, heben wir uns diese noch ein wenig auf und begnügen uns mit einem Beispiel, das zeigt, dass Kompaktheit als Verallgemeinerung von Endlichkeit angesehen werden kann.

2.29 Beispiel. Jeder endliche Raum (in der Tat jeder Raum mit nur endlich vielen offenen Mengen) ist quasikompakt. Ein diskreter Raum X ist genau dann quasikompakt (und damit kompakt), wenn er endlich ist (betrachte die Überdeckung $\{\{x\} : x \in X\}$).

Nun wieder ein wenig Prüfungsvorbereitung für die, die die Analysisprüfung noch nicht hinter sich haben.

2.30 Proposition. Ein abgeschlossener Unterraum A eines quasikompakten Raumes X ist quasikompakt.

Beweis. Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$ eine offene Überdeckung von A . Betrachte nun $\mathcal{C}' := \{U \subset X : U \text{ offen, } U \cap A \in \mathcal{C}\}$. Nach der Definition der Unterraumtopologie gibt es zu jedem $V \in \mathcal{C}$ ein $U \in \mathcal{C}'$ mit $U \cap A = V$. Daher ist $\mathcal{C}' \cup \{X - A\}$ eine offene Überdeckung von X und hat eine endliche Teilüberdeckung \mathcal{C}'' . $\{U \cap A : U \in \mathcal{C}''\}$ ist nun eine endliche Teilüberdeckung von \mathcal{C} . \square

2.31 Proposition. Eine quasikompakte Teilmenge K eines Hausdorffraumes X ist abgeschlossen.

Beweis. Sei $x \in X - K$. Es ist zu zeigen, dass $X - K$ Umgebung von x ist. Setze $\mathcal{C} := \{X - \bar{U} : U \text{ Umgebung von } x\}$. Da X hausdorffsch ist, ist $\bigcup \mathcal{C} = X - \{x\}$, also $\mathcal{C}' := \{U \cap K : U \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von K . Nun existiert eine endliche Teilüberdeckung von \mathcal{C}' , also auch eine endliche Menge \mathcal{U} von Umgebungen von X , so dass $\bigcup \{X - \bar{U} : U \in \mathcal{U}\} \supset K$, also $\bigcap \mathcal{U} \subset X - K$. Nun ist $\bigcap \mathcal{U}$ eine Umgebung von x , also ist auch $X - K$ eine Umgebung von x . \square

Stetige Bilder quasikompakter Räume sind quasikompakt.

2.32 Proposition. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv und X quasikompakt. Dann ist auch Y quasikompakt.

Beweis. Sei \mathcal{C} eine offene Überdeckung von Y . Dann ist $\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von X . Es gibt daher eine endliche Teilmenge $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, so dass $\{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{C}'\}$ eine Überdeckung von X ist. Aus der Surjektivität von f folgt, dass \mathcal{C}' eine Überdeckung von Y ist: Sei $y \in Y$ und $x \in X$ mit $f(x) = y$. Nun existiert $U \in \mathcal{C}'$ mit $x \in f^{-1}[U]$, also $y = f(x) \in U$. \square

Kompaktheit kann sehr nützlich bei der Konstruktion stetiger Abbildungen sein.

2.33 Proposition. Seien X, Y Räume, X quasikompakt, Y hausdorffsch und sei $p: X \rightarrow Y$ eine stetige Surjektion. Dann ist für jeden Raum Z und jede Funktion $f: Y \rightarrow Z$, so dass $f \circ p$ stetig ist, bereits f stetig.

2.34 Bemerkung. Man kann das auch wie folgt ausdrücken: Sind X, Y, Z und p wie eben beschrieben und ist $g: X \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung, so dass $g(x) = g(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $p(x) = p(x')$, so existiert genau eine stetige Abbildung $f: Y \rightarrow Z$, so dass

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ & \searrow g & \vdots f \\ & & Z \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Sei $A \subset Z$ abgeschlossen. Es ist zu zeigen, dass $f^{-1}[A]$ abgeschlossen ist. Da $f \circ p$ stetig ist, ist $p^{-1}[f^{-1}[A]]$ abgeschlossen, also nach Proposition 2.30 quasikompakt. Nach Proposition 2.32 ist $p[p^{-1}[f^{-1}[A]]]$ quasikompakt und nach Proposition 2.31 abgeschlossen. Da p surjektiv ist, ist $p[p^{-1}[f^{-1}[A]]] = f^{-1}[A]$. \square

2.35 Beispiel. Ist Z ein beliebiger Raum und $g: I \rightarrow Z$ eine stetige Funktion mit $g(0) = g(1)$, so gibt es eine stetige Funktion $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow Z$ mit $f(\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) = g(t)$ für $t \in I$. Natürlich hätte man das auch noch leicht per Hand nachrechnen können.

2.36 Korollar. Ist $h: X \rightarrow Y$ eine stetige Bijektion von einem quasikompakten Raum in einen Hausdorffraum, so ist h ein Homöomorphismus.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $h^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig ist, und nach dem eben gezeigten ist das der Fall, da $h^{-1} \circ h = \text{id}_X$ stetig ist. \square

Produkte

Eine typische Anwendung von Kompaktheit ist auch die folgende Proposition. Man benutzt sie zum Beispiel, um zu zeigen, dass ein lokaler Fluss auf einer kompakten Mannigfaltigkeit (oder ein lokaler Fluss auf \mathbb{R}^n , der außerhalb eines Kompaktums konstant ist) zu einem globalen Fluss erweitert werden kann.

2.37 Proposition. Seien X, Y Räume. Ist Y quasikompakt, $x \in X$ und $O \subset X \times Y$ offen mit $\{x\} \times Y \subset O$, so existiert eine Umgebung U von x , so dass $U \times Y \subset O$.

Beweis. Wir erinnern uns, dass $\{V \times W : V \subset X \text{ offen, } W \subset Y \text{ offen}\}$ eine Basis der Produkttopologie ist. Daher gilt, wenn wir

$$\mathcal{C} := \{V \times W : V \text{ Umgebung von } x, W \subset Y \text{ offen, } V \times W \subset O\}$$

setzen, $\{x\} \times Y \subset \bigcup \mathcal{C}$. Nun ist $\{W \subset Y : \text{Es ex. } V \subset X \text{ mit } V \times W \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von Y . Aus der Quasikompaktheit von Y folgt nun die Existenz von $n \in \mathbb{N}$ und für $1 \leq k \leq n$ Umgebungen $V_k \subset X$ von x und offenen Mengen $W_k \subset Y$, so dass $V_k \times W_k \subset O$ und $\bigcup_{k=1}^n W_k = Y$. Nun ist $U := \bigcap_{k=1}^n V_k$ eine Umgebung von x und

$$U \times Y = U \times \bigcup_{k=1}^n W_k \subset \bigcup_{k=1}^n (V_k \times W_k) \subset O,$$

wie gefordert. □

Dies ist auch ein Schritt im Beweis der folgenden Proposition, den wir trotz ihrer Wichtigkeit als Übung stellen, da sie später noch in größerer Allgemeinheit bewiesen werden wird.¹

2.38 Proposition. *Das Produkt zweier quasikompakter Räume ist quasikompakt.*

Beweis. Als Aufgabe. □

Metrische Räume

Wenn wir uns nicht zu sehr auf das in der Analysis gezeigte beziehen wollen, sollten wir nun noch zeigen, dass eine Teilmenge eines euklidischen Raumes genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Aufgrund des bisher gezeigten, würde es genügen, zu zeigen, dass das Einheitsintervall kompakt ist; man überlege sich das. Das ginge auch schnell, wäre aber nicht sonderlich spannend. In [Mun75, Chap. 3, Thm. 6.1] findet man eine Verallgemeinerung auf gewisse geordnete Räume. Wir werden eine Verallgemeinerung auf metrische Räume behandeln, wie sie zum Beispiel in [Bre93, I.9] dargestellt ist. Dazu müssen wir allerdings für metrische Räume gewisse Begriffe wie Cauchy-Folgen als bekannt voraussetzen.

2.39 Definition. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.

2.40 Definition. Ein metrischer Raum heißt *total beschränkt*, wenn er für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung durch endlich viele ε -Kugeln besitzt.

¹Der spätere Beweis wird allerdings das Auswahlaxiom benötigen, was hier nicht der Fall ist.

2.41 Proposition. *In einem metrischen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (i) X ist kompakt.
- (ii) X ist vollständig und total beschränkt.

Der Beweis ist im wesentlichen der, mit dem in Analysis II häufig gezeigt wird, dass I^n kompakt ist. Insofern ist die Formulierung der Proposition vielleicht interessanter als der Beweis, da hier in gewisser Weise die richtige Verallgemeinerung gefunden wurde.

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei X nicht vollständig und (a_n) eine nicht konvergente Cauchy-Folge. Zu beliebigem $x \in X$ existiert dann ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgenglieder nicht in $B_\varepsilon(x)$ liegen. Da (a_n) Cauchy-Folge ist, folgt daraus, dass es ein ε_x gibt, so dass nur endlich viele Folgenglieder in $B_{\varepsilon_x}(x)$ liegen. Nun ist $\{B_{\varepsilon_x}(x) : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X . Da in jedem Element dieser Überdeckung nur endlich viele Folgenglieder liegen, kann sie keine endliche Teilüberdeckung haben. Damit ist X nicht kompakt.

Sei nun X kompakt und $\varepsilon > 0$. Die Menge aller ε -Bälle überdeckt X und aufgrund der Kompaktheit genügen tatsächlich endlich viele. Damit ist X total beschränkt.

„ \Leftarrow “ Sei X vollständig und total beschränkt und \mathcal{C} eine offene Überdeckung von X . Wir werden die Annahme, dass \mathcal{C} keine endliche Teilüberdeckung habe, zum Widerspruch führen. Setze zunächst $A_{-1} := X$. Angenommen $A_{n-1} \subset X$ sei definiert und werde von keiner endlichen Teilmenge von \mathcal{C} überdeckt. Dann können wir A_{n-1} mit endlich vielen $\frac{1}{2^n}$ -Kugeln überdecken, und eine von denen, die A_{n-1} treffen wird wiederum von keiner endlichen Teilmenge von \mathcal{C} überdeckt. Sei A_n eine solche Kugel und x_n ihr Mittelpunkt. Nun ist (x_n) eine Cauchy-Folge und $B_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ wird von keiner endlichen Teilmenge von \mathcal{C} überdeckt. Da X vollständig ist, konvergiert (x_n) gegen einen Punkt, den wir y nennen wollen. Nun gibt es ein $O \in \mathcal{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y) \subset O$. Nun gibt es aber ein n , so dass $x_n \in B_{\varepsilon/2}(y)$ und $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, was zu einem Widerspruch führt. \square

2.42 Korollar. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und in der euklidischen Norm beschränkt ist.*

Beweis. Der Unterraum X des vollständigen metrischen Raumes \mathbb{R}^n ist genau dann vollständig, wenn er abgeschlossen ist. Wir zeigen nun noch, dass er genau dann beschränkt ist, wenn er total beschränkt ist. Es ist leicht zu sehen, dass ein unbeschränktes X nicht total beschränkt sein kann. Sei nun X beschränkt und $\varepsilon > 0$. Wiederum ist leicht zu sehen, dass es möglich ist, X mit endlich vielen $\frac{\varepsilon}{2}$ Kugeln in \mathbb{R}^n zu überdecken. Lasse nun jede Kugel einer solchen Überdeckung weg, falls ihr Schnitt mit X leer ist und ersetze

sie ansonsten durch die ε -Kugel um einen Punkt in diesem Schnitt. Dies ergibt eine Überdeckung von X mit endlich vielen ε -Kugeln. \square

Abschnitt 3

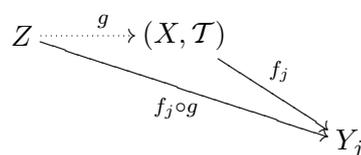
Initialtopologien und Produkte

Initialtopologien

Wir beginnen mit einer Definition. Diese ist recht abstrakt, aber wir werden sogleich sehen, dass sie uns bereits bekanntes verallgemeinert.

3.1 Definition. Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j: X \rightarrow Y_j$ Funktionen für $j \in J$. Wir nennen eine Topologie \mathcal{T} auf X *Initialtopologie bezüglich der f_j* , wenn folgendes gilt:

- (i) Die Abbildungen $f_j: (X, \mathcal{T}) \rightarrow Y_j$ sind stetig.
- (ii) Für alle Räume Z und Funktionen $g: Z \rightarrow X$ gilt: Sind alle $f_j \circ g: Z \rightarrow Y_j$ stetig, so ist $g: Z \rightarrow (X, \mathcal{T})$ stetig.



Bei der *Initialtopologie* steht der Raum X *vorne* an den zu f_j gehörigen Pfeilen, wir werden später die *Finaltopologie* kennen lernen, bei ihr steht er *hinten*.

3.2 Beispiel. Ist Y ein Raum und $X \subset Y$, so ist die Unterraumtopologie auf X Initialtopologie bezüglich der Inklusion $i: X \rightarrow Y$. Das haben wir in Proposition 1.43 gesehen.

3.3 Beispiel. Sind X, Y Räume, so ist die Produkttopologie auf $X \times Y$ Initialtopologie bezüglich der kanonischen Projektionen $p_1: X \times Y \rightarrow X$ und $p_2: X \times Y \rightarrow Y$. Das haben wir in Korollar 1.55 gezeigt.

Das letzte Beispiel ist für uns im Moment insofern das wichtigste, als wir für das Produkt zweier Räume eigentlich schon alles gezeigt haben, was es für Initialtopologien zu zeigen gibt.

Wir werden nun die Existenz und Eindeutigkeit von Initialtopologien zeigen.

3.4 Proposition. Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j: X \rightarrow Y_j$ Funktionen für $j \in J$. Es seien \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 Topologien auf X , so dass \mathcal{T}_1 Eigenschaft (i) aus der Definition der Initialtopologie hat und \mathcal{T}_2 Eigenschaft (ii). Dann ist \mathcal{T}_1 feiner als \mathcal{T}_2 .

Beweis. Sei $i: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ die Funktion, die auf X die Identität ist. Es ist die Stetigkeit von i zu zeigen. Da \mathcal{T}_2 Eigenschaft (ii) hat, genügt dazu die Stetigkeit aller $f_j \circ i$, und das ist gerade die Eigenschaft (i) für \mathcal{T}_1 . \square

3.5 Korollar. Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j: X \rightarrow Y_j$ Funktionen für $j \in J$. Existiert die Initialtopologie bezüglich der f_j , so ist sie eindeutig bestimmt. \square

Wir müssen also nur noch die Frage der Existenz klären. Die eben gezeigten Proposition zeigt schon, wie Initialtopologien aussehen müssen, wenn sie existieren: Die Initialtopologie muss die größte sein, so dass die f_j stetig sind.

3.6 Proposition. Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j: X \rightarrow Y_j$ Funktionen für $j \in J$. Dann ist die durch die Subbasis

$$\mathcal{S} := \bigcup_{j \in J} \left\{ f_j^{-1}[O] : O \subset Y_j \text{ offen} \right\}$$

definierte Topologie auf X die Initialtopologie bezüglich der f_j .

Beweis. Wie für das Produkt zweier Räume in Proposition 1.52 und Proposition 1.54. \square

Unterräume

3.7 Definition. Seien X, Y Räume. Eine Funktion $i: X \rightarrow Y$ heißt *Einbettung*, wenn sie injektiv ist und X die Initialtopologie bezüglich i trägt.

Die Funktion i ist also gerade dann eine Einbettung, wenn sie ein Homöomorphismus zwischen X und dem mit der Unterraumtopologie versehenen Bild $i[X]$ ist.

Produkte

Bevor wir beliebige Produkte topologischer Räume definieren, erinnern wir an das kartesische Produkt von Mengen und legen dafür Notation fest.

3.8 Notation. Sei J eine beliebige Menge und M_j eine Menge für alle $j \in J$. Das *kartesische Produkt* der M_j ist

$$\prod_{j \in J} M_j := \left\{ x: J \rightarrow \bigcup_{j \in J} M_j \mid x(j) \in M_j \text{ für alle } j \in J \right\}.$$

Anstelle von $x(j)$ schreiben wir meist x_j und dementsprechend auch $(x_j)_{j \in J}$ anstelle von x . Die *kanonischen Projektionen* sind die Abbildungen

$$p_k: \prod_{j \in J} M_j \rightarrow M_k, \quad k \in J,$$

$$x \mapsto x_k.$$

Wir bemerken, dass für Mengen M und N

$$M^N := \{x: N \rightarrow M\}$$

gerade der Spezialfall $M^N = \prod_{j \in N} M$ ist.

3.9 Definition. Seien J eine beliebige Menge und X_j topologische Räume für $j \in J$. Das *Produkt* $\prod_{j \in J} X_j$ der Räume X_j ist das kartesische Produkt der zugrunde liegenden Mengen versehen mit der Initialtopologie bezüglich der kanonischen Projektionen, die wir die *Produkttopologie* nennen.

3.10 Notation. Wir schreiben auch $X_0 \times \cdots \times X_{n-1}$ für $\prod_{j \in \{0, \dots, n-1\}} X_j$.

Wir wollen die in Proposition 3.6 für eine Initialtopologie angegebene Subbasis für ein Produkt explizit hinschreiben.

3.11 Proposition. Seien J eine beliebige Menge und (X_j, \mathcal{T}_j) für $j \in J$ Räume. Dann ist

$$\left\{ \prod_{j \in J} O_j : O_j \in \mathcal{T}_j \text{ f. a. } j \in J, \text{ es ex. } k \in J, \text{ s. d. } O_j = X_j \text{ f. a. } j \neq k \right\}$$

eine Subbasis der Produkttopologie auf $\prod_{j \in J} X_j$.

Beweis. Ist p_k die kanonische Projektion und $U \in \mathcal{T}_k$, so ist

$$p_k^{-1}[U] = \prod_{j \in J} O_j \quad \text{mit } O_j = \begin{cases} U, & j = k, \\ X_j, & j \neq k, \end{cases}$$

und diese Mengen bilden nach Konstruktion der Initialtopologie eine Subbasis. \square

3.12 Proposition. Seien J eine beliebige Menge und (X_j, \mathcal{T}_j) für $j \in J$ Räume. Dann ist

$$\left\{ \prod_{j \in J} O_j : O_j \in \mathcal{T}_j \text{ f. a. } j \in J, O_j = X_j \text{ für fast alle } j \right\},$$

wobei ‚fast alle‘ alle bis auf endlich viele bedeute, eine Basis der Produkttopologie auf $\prod_{j \in J} X_j$.

Beweis. Dies sind gerade die endlichen Schnitte von Elementen der Subbasis aus der vorhergehenden Proposition. \square

Man beachte, dass beliebige Mengen der Form $\prod_{j \in J} O_j$ mit $O_j \in \mathcal{T}_j$ im allgemeinen in der Produkttopologie *nicht* offen sind. Dadurch werden die Umgebungsbasen in großen Produkten schnell groß, wie wir in Korollar 3.27 zeigen werden.

Beispiel: Das Cantorsche Diskontinuum

Wir erinnern zunächst an die übliche Konstruktion des Cantorschen Diskontinuums und werden dann sehen, dass dieser Raum sich bis auf Homöomorphie sehr einfach mit Hilfe der Produkttopologie beschreiben lässt.

Um das Cantorsche Diskontinuum zu erhalten, beginnen wir mit dem Einheitsintervall und entfernen das Innere des mittleren Drittels, wonach zwei abgeschlossene Intervalle übrig bleiben. Von diesen entfernen wir wiederum die Inneren der mittleren Drittel und so weiter. Dieser Vorgang wird unendlich oft wiederholt. Genauer haben wir

$$\begin{aligned} A_0 &= [0, 1], \\ A_1 &= [0, 1/3] \cup [2/3, 1], \\ A_2 &= [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1], \\ &\vdots \end{aligned}$$

und das Cantorsche Diskontinuum

$$A_\infty = \bigcap_{n \geq 0} A_n.$$

Man sieht, dass

$$A_n = \bigcup_{x \in \{0,2\}^n} A_n^x \quad \text{mit} \quad A_n^x = \left[\sum_{0 \leq i < n} x_i 3^{-i-1}, \sum_{0 \leq i < n} x_i 3^{-i-1} + 3^{-n} \right].$$

Dazu ist es sinnvoll, die Zahlen des Einheitsintervalls zur Basis 3 darzustellen. Wir definieren daher die Funktion

$$\begin{aligned} s: \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow I, \\ x &\mapsto \sum_{i \geq 0} x_i 3^{-i-1}, \end{aligned}$$

die einer Ziffernfolge die von ihr dargestellte Zahl zuordnet. Bekanntermaßen ist s surjektiv und fast injektiv: Bis auf abzählbar viele Zahlen des Einheitsintervalls haben alle nur ein Urbild, die Ausnahmen haben zwei Urbilder, die von der Gleichheit $\sum_{i \geq n} (2 \cdot 3^{-i-1}) = 3^{-n}$ herrühren.

3.13 Proposition. Die Einschränkung von s auf $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ ist injektiv und hat A_{∞} als Bild.

Beweis. Mit

$$V_n = \left\{ x \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} : x_i \in \{0, 2\} \text{ für alle } i < n \right\}$$

ist $s[V_n] = A_n$. Damit ist sofort

$$s \left[\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \right] = s \left[\bigcap_{n \geq 0} V_n \right] \subset \bigcap_{n \geq 0} A_n = A_{\infty}.$$

Benutzt man, dass jeder Punkt in I unter s höchstens zwei Urbilder hat, so sieht man, dass auch $s \left[\bigcap_{n \geq 0} V_n \right] \supset \bigcap_{n \geq 0} A_n$. Damit ist $s \left[\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \right] = A_{\infty}$. Für die Injektivität bemerken wir, dass die Einschränkung von s auf $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ injektiv ist und s mit der Multiplikation mit 2 vertauscht. \square

3.14 Korollar. Die Menge A_{∞} ist von der gleichen Mächtigkeit wie \mathbb{R} . \square

Von nun an wollen wir $\{0, 1, 2\}$ als diskreten topologischen Raum betrachten und $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie versehen.

3.15 Lemma. Die oben definierte Abbildung $: \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow I$ ist stetig.

Beweis. Sei $x \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ und $\varepsilon > 0$. Wähle n so, dass $3^{-n} < \varepsilon$. Betrachte nun

$$U := \left\{ y \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} : y_i = x_i \text{ for } i < n \right\}.$$

U ist eine Umgebung von x und für $y \in U$ ist

$$|s(y) - s(x)| \leq \sum_{i \geq n} |y_i - x_i| 3^{-i-1} \leq \sum_{i \geq n} (2 \cdot 3^{-i-1}) = 3^{-n} < \varepsilon.$$

Damit ist s stetig. \square

Wir wissen nun also, dass s eine stetige Bijektion von $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ nach A_{∞} vermittelt. Wir wollen zeigen, dass diese tatsächlich ein Homöomorphismus ist. Dazu betrachten wir zunächst die Topologie auf $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ genauer.

3.16 Definition und Proposition. Für $n \geq 0$ und $x \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ setzen wir

$$U_n^x := \left\{ y \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} : y_i = x_i \text{ for } i < n \right\}.$$

Diese Mengen bilden eine Basis der Topologie von $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$.

Beweis. Zunächst einmal ist U_n^x offen, da $\{x_i\}$ für alle i offen ist und wir nur endlich viele Koordinaten einschränken. Sei nun $\prod_{i \geq 0} O_i$ ein Element der in Proposition 3.12 gegebenen Basis, es existiere also ein n , so dass $O_i = \{0, 2\}$ für $i \geq n$. Dann ist

$$\prod_{i \geq 0} O_i = \bigcup_{x \in O_0 \times \dots \times O_{n-1}} U_n^x.$$

□

3.17 Proposition. Die Abbildung s induziert einen Homöomorphismus $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\cong} A_\infty$.

Beweis. Um Verwirrungen zu vermeiden, bezeichnen wir die Einschränkung mit

$$\bar{s}: \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow A_\infty.$$

Wir haben bereits gesehen, dass \bar{s} eine stetige Bijektion ist. Es bleibt zu zeigen, dass \bar{s} offene Mengen auf offene Mengen abbildet. Es genügt dies, dies für die Basismengen U_n^x nachzuprüfen. Wie im Beweis von Proposition 3.13 ist $\bar{s}[U_n^x] = A_n^x \cap A_\infty$. Nun ist A_n^x offen (und abgeschlossen) in A^n und damit $\bar{s}[U_n^x]$ offene Teilmenge von A_∞ . □

3.18 Korollar. Der Raum $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ ist kompakt.

Beweis. Der dazu homöomorphe Raum A_∞ ist abgeschlossener Unterraum des kompakten Raumes I , da er der Schnitt der abgeschlossenen Unterräume A_n ist, und damit kompakt. □

Hätten wir schon vor dem Beweis der Homöomorphie von $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ und A_∞ gewusst, dass $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ kompakt ist, hätten wir uns den letzten Teil des Beweises erspart, da die stetige Bijektion $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow A_\infty$ nach Proposition 2.33 bereits ein Homöomorphismus hätte sein müssen. In der Tat werden wir wie bereits angekündigt später den Satz von Tychonoff beweisen, der besagt, dass beliebige Produkte kompakter Räume kompakt sind. In diesem Fall, und allgemeiner für abzählbare Produkte metrischer kompakter Räume, hätten wir auch direktere Methoden zur Verfügung gehabt.

Abzählbares

3.19 Definition. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik auf X gibt, die \mathcal{T} induziert.

3.20 Definition. Man sagt, ein topologischer Raum erfülle das *erste Abzählbarkeitsaxiom*,¹ wenn jeder seiner Punkte eine abzählbare Umgebungsbasis

¹Diese Eigenschaft ein Axiom zu nennen, ist eigentlich etwas unglücklich. Vor allem ist es unpraktisch, kein Adjektiv für diese Eigenschaft zu haben. Im englischen Sprachraum hingegen sagt man auch einfach “ X is first countable”, was zwar vielleicht sprachlich fragwürdig, aber sehr angenehm ist.

besitzt.

3.21 Proposition. *Sei X ein topologischer Raum. Ist X metrisierbar, so erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Sei d eine Metrik, die die Topologie von X induziert und $x \in X$. Dann ist $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x . \square

Die $\frac{1}{n}$ -Umgebungen haben noch die angenehme Eigenschaft, ineinander zu liegen. Das kann man auch allgemein bei einem das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllenden Raum erreichen:

3.22 Lemma. *Sei X ein Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und $x \in X$. Dann hat x eine Umgebungsbasis der Form $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $U_n \subset U_m$ für alle n, m mit $n \geq m$.*

Beweis. Zunächst hat x überhaupt eine abzählbare Umgebungsbasis \mathcal{B} , also eine der Form $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. (Sollte \mathcal{B} tatsächlich endlich sein, so wiederhole man ein Element einfach unendlich oft.) Setze nun $U_n := \bigcap_{k \leq n} V_k$. Dann gilt für $m \geq n$, dass $U_m \subset U_n$, und die U_n sind Umgebungen von x , da endliche Schnitte offener Mengen offen sind. Ist nun O eine beliebige Umgebung von x , so gibt es, da \mathcal{B} eine Umgebungsbasis von x ist, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $V_n \subset O$. Da $U_n \subset V_n$, ist auch $U_n \subset O$ und damit $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x . \square

3.23 Definition. Man sagt, ein topologischer Raum erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

3.24 Proposition. *Sind $X_i, 1 \in \mathbb{N}$ Räume, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, so erfüllt auch $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Sei \mathcal{B}_i eine Basis der Topologie von X_i , so ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \cdots : O_i \in \mathcal{B}_i\}$$

abzählbar und eine Basis der Topologie des Produkts. \square

3.25 Proposition. \mathbb{R}^n erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis. Es genügt, \mathbb{R} zu betrachten, und man prüft leicht nach, dass die abzählbare Menge $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ eine Basis der Topologie von \mathbb{R} ist. \square

3.26 Proposition. *Sei J überabzählbar und seien X_j Räume für $j \in J$. Ist $x \in \prod_{j \in J} X_j$ und gibt es für jedes $j \in J$ eine von X_j verschiedene Umgebung V_j von x_j , so besitzt x keine Umgebungsbasis, die durch Inklusion total geordnet ist.*

Beweis. Sei \mathcal{B} eine Umgebungsbasis von x . Für eine beliebige Umgebung U von x definieren wir

$$F(U) := \{j \in J : p_j[U] \neq X_j\}.$$

$F(U)$ ist eine endliche Teilmenge von J , und aus $U \subset V$ folgt $F(U) \supset F(V)$. Sei C eine abzählbare Teilmenge von J . Für jedes $i \in C$ gibt es ein $U_i \in \mathcal{B}$ mit $U_i \supset p_i^{-1}[V_i]$ und daher $i \in F(U_i)$. Es seien solche gewählt, dann ist $\bigcup_{i \in C} F(U_i)$ abzählbar unendlich. Sei nun $j \in J \setminus \bigcup_{i \in C} F(U_i)$ und $W \in \mathcal{B}$ mit $j \in F(W)$ und damit $F(W) \not\subset F(U_i)$ für alle $i \in C$. Andererseits kann nicht für alle $i \in C$ gelten, dass $F(W) \supset F(U_i)$, denn dann müsste $F(W)$ unendlich sein. Es gibt also ein $i \in C$, so dass $W \not\supset U_i$ und $W \not\subset U_i$. \square

3.27 Korollar. Sei J überabzählbar und seien X_j Räume für $j \in J$. Ist $x \in \prod_{j \in J} X_j$ und gibt es für jedes $j \in J$ eine von X_j verschiedene Umgebung von x_j , so hat x keine abzählbare Umgebungsbasis.

Beweis. Wegen Lemma 3.22 wäre eine abzählbare Umgebungsbasis ein Widerspruch zu Proposition 3.26. \square

Abschnitt 4

Konvergenz, Filter und der Satz von Tychonoff

In metrischen Räumen kann man topologische Begriffe wie Stetigkeit, Abschluss, Kompaktheit auch mit Hilfe von Konvergenz von Folgen charakterisieren. Die Konvergenz einer Folge lässt sich auch in einem topologischen Raum definieren, es stellt sich jedoch heraus, dass im allgemeinen Folgen nicht zur Beschreibung eines topologischen Raumes ausreichen. Es gibt jedoch zwei andere Konvergenztheorien, die für topologische Räume das leisten, was Folgen für metrische Räume leisten: die der Netze und die der Filter. Netze sind eine direkte Verallgemeinerung von Folgen, was sie zunächst anschaulicher und vertrauter macht. Dennoch werden wir sie hier aus Zeitgründen nicht betrachten. Andererseits mögen Mengentheoretiker Filter mehr, und in gewisser Weise ist die Theorie der Filter die einfachere. Vor allem ergibt sich natürlich das mächtige Konzept des Ultrafilters. Es gibt zwar auch ein entsprechendes Konzept für Netze, aber das ist weniger naheliegend. Wir werden daher die Theorie der Filter zu „unserer“ Konvergenztheorie machen.

Folgen

4.1 Definition. Sei M eine Menge. Eine *Folge* a in M ist eine Funktion $a: \mathbb{N} \rightarrow M$.

4.2 Definition. Sei X ein Raum, a eine Folge in X und $x \in X$. Wir sagen a *konvergiere* gegen x und schreiben $a \rightarrow x$, wenn für jede Umgebung U von x ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_m \in U$ für alle $m \geq n$.

4.3 Proposition. Sei X ein Raum, $A \subset X$ und $x \in X$. Existiert eine Folge a mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \rightarrow x$, so ist $x \in \overline{A}$.

Beweis. Ist U eine beliebige Umgebung von x , so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U$, also ist $U \cap A \neq \emptyset$. \square

Wir haben eine partielle Umkehrung:

4.4 Proposition. Sei X ein Raum, $A \subset X$ und $x \in \overline{A}$ ein Punkt, der eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Dann gibt es eine Folge a in A , die gegen x konvergiert.

Beweis. Sei $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x , nach Voraussetzung existiert eine solche. Wie in Lemma 3.22 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $U_m \subset U_n$ für alle m, n mit $m \geq n$. Da $x \in \overline{A}$, ist $U_n \cap A \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen (!) nun eine Folge a mit $a_n \in U_n \cap A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist nun V eine beliebige Umgebung von x , so existiert, da $\{U_n\}$ Umgebungsbasis ist, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n \subset V$ und daher $U_m \subset U_n \subset V$ für alle $m \geq n$. Damit konvergiert a gegen x . \square

4.5 Warnung. Ohne die Voraussetzung einer abzählbaren Umgebungsbasis gilt dies im allgemeinen nicht. Beispiele sind allerdings nicht ganz leicht anzugeben. Proposition 3.26 legt nahe, dass wir in überabzählbaren Produkten fündig werden. In der Tat besitzt der Raum I^I mit der Produkttopologie eine abzählbare dichte Teilmenge D , wie man mit elementaren Mitteln zeigen kann. Nun ist $\#I^I = 2^{2^{\#\mathbb{N}}}$, aber in D gibt es nur $2^{\#\mathbb{N}}$ viele Folgen, es muss also (da in Hausdorffräumen Grenzwerte eindeutig sind) Punkte im Abschluss von D geben, gegen die keine Folge in D konvergiert.

Um Filter zumindest ansatzweise zu motivieren, wollen wir den Begriff der Konvergenz einer Folge umformulieren. Sei wieder $a: \mathbb{N} \rightarrow X$ eine Folge und $x \in X$. Wir setzen

$$\mathcal{B}_a := \{\{a_i : i \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{U}(x) := \{U \subset X : U \text{ ist Umgebung von } x\}. \quad (4.2)$$

Dann gilt $a \rightarrow x$ genau dann, wenn zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}_a$ existiert, so dass $B \subset U$. Setzen wir weiterhin

$$\mathcal{F}_a := \{M \subset X : \text{Es ex. } B \in \mathcal{B}_a \text{ mit } M \supset B\}, \quad (4.3)$$

so ist also $a \rightarrow x$ genau dann, wenn $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}_a$. Die Mengensysteme \mathcal{F}_a und $\mathcal{U}(x)$ sind *Filter*, und unsere Strategie wird sein, anstatt mit a direkt mit \mathcal{F}_a zu arbeiten und auch solche Filter zuzulassen, die nicht auf diese Art entstehen.

Filter

4.6 Definition. Sei M eine Menge. Ein *Filter* auf M ist eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(M)$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(F1a) $M \in \mathcal{F}$.

(F1b) Für alle $A, A' \in \mathcal{F}$ ist $A \cap A' \in \mathcal{F}$.

(F2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(F3) Für alle $A \in \mathcal{F}$ und $A' \subset M$ mit $A' \supset A$ ist $A' \in \mathcal{F}$.

4.7 Beispiel. Das Mengensystem in (4.3) ist ein Filter.

4.8 Definition. Sei M eine Menge und \mathcal{F} ein Filter auf M . Eine *Filterbasis* von \mathcal{F} ist eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(M)$, so dass

$$\mathcal{F} = \{A \subset M : \text{Es ex. } B \in \mathcal{B} \text{ mit } A \supset B\}.$$

4.9 Bemerkung. \mathcal{B} ist also genau dann Filterbasis von \mathcal{F} , wenn $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, und zu jedem $A \in \mathcal{F}$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset A$ existiert.

4.10 Beispiel. Das Mengensystem in (4.1) ist eine Filterbasis des Filters in (4.3).

4.11 Proposition. Sei M eine Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(M)$. Es gibt genau dann einen Filter auf M , von dem \mathcal{B} eine Filterbasis ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(B1a) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(B1b) Für alle $B, B' \in \mathcal{B}$ existiert ein $B'' \in \mathcal{B}$ mit $B'' \subset B \cap B'$.

(B2) $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

Dieser Filter ist dann eindeutig bestimmt. □

4.12 Definition. Es seien M eine Menge und $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ Filter auf M . \mathcal{F}' heißt eine *Verfeinerung* von \mathcal{F} und *feiner* als \mathcal{F} , wenn $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. \mathcal{F}' heißt eine *echte Verfeinerung* von \mathcal{F} , wenn zusätzlich $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}$.

Wir wenden uns nun Filtern auf topologischen Räumen zu.

4.13 Definition und Proposition. Ist X ein Raum und $x \in X$, so ist die Menge aller Umgebungen von x ein Filter auf X . Diesen nennen wir den *Umgebungsfilter* von x und bezeichnen ihn mit $\mathcal{U}(x)$. Eine Filterbasis des Umgebungsfilters ist gerade eine Umgebungsbasis von x .

4.14 Definition. Es sei X ein Raum, $x \in X$ und \mathcal{F} ein Filter auf X . Wir sagen, \mathcal{F} konvergiere gegen x und schreiben $\mathcal{F} \rightarrow x$, wenn \mathcal{F} eine Verfeinerung des Umgebungsfilters $\mathcal{U}(x)$ von x ist.

Diese Definition ist durch die Diskussion am Anfang dieses Abschnitts motiviert:

4.15 Bemerkung. Für den Filter aus (4.3) haben wir gesehen, dass $\mathcal{F}_a \rightarrow x$ genau dann, wenn $a \rightarrow x$.

Erste Eigenschaften

Wir wollen nun sehen, dass Konvergenz von Filtern tatsächlich zur Beschreibung von topologischen Eigenschaften ausreicht. Wir beginnen mit einer Charakterisierung von Hausdorffräumen.

4.16 Proposition. *Sei X ein Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) X ist hausdorffsch.

(ii) Jeder Filter in X konvergiert gegen höchstens einen Punkt.

Beweis. „ \Rightarrow “ Seien $x, y \in X$ und \mathcal{F} ein Filter, der gegen x und gegen y konvergiert, also gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{U}(y)$ ist. Für beliebige $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ sind dann $U, V \in \mathcal{F}$, also $U \cap V \in \mathcal{F}$ und damit $U \cap V \neq \emptyset$. Ist nun X hausdorffsch, so folgt $x = y$.

„ \Leftarrow “ Sei X nicht hausdorffsch. Dann existieren $x, y \in X$, $x \neq y$, so dass für beliebige $U \in \mathcal{U}(x)$, $V \in \mathcal{U}(y)$ gilt, dass $U \cap V = \emptyset$. Da $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{U}(y)$ Filter sind, folgt daraus, dass $\mathcal{B} := \{U \cap V : U \in \mathcal{U}(x), V \in \mathcal{U}(y)\}$ eine Filterbasis ist. Da $\mathcal{B} \supset \mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{B} \supset \mathcal{U}(y)$, gibt es damit einen Filter, der gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{U}(y)$ ist. \square

Wir notieren kurz, was wir nebenbei gezeigt haben:

4.17 Lemma. *Sei M eine Menge und $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ Filter auf M . \mathcal{F} und \mathcal{F}' haben genau dann eine gemeinsame Verfeinerung, wenn $A \cap A' \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathcal{F}$ und $A' \in \mathcal{F}'$. \square*

Nun wollen wir gerne zeigen, dass es für $A \subset X$ und $x \in \bar{A}$ einen Filter auf A gibt, der gegen x konvergiert. Leider ergibt das keinen Sinn, da ein Filter auf A kein Filter auf X ist. Das ist ein Spezialfall (nämlich der einer Inklusionsabbildung) des Problems, das Bild eines Filter unter einer Funktion zu definieren.

4.18 Definition und Proposition. *Seien M, N Mengen, \mathcal{F} ein Filter auf M und $f: M \rightarrow N$ eine Funktion. Dann ist*

$$f_*(\mathcal{F}) := \{B \subset N : f^{-1}[B] \in \mathcal{F}\}$$

ein Filter, den wir den Bildfilter von \mathcal{F} unter f nennen. Die Menge

$$\mathcal{B} := \{f[A] : A \in \mathcal{F}\}$$

ist eine Filterbasis von $f_(\mathcal{F})$.*

Beweis. Dass $f_*(\mathcal{F})$ ein Filter ist, rechnet man sofort nach.

Sei $A \in \mathcal{F}$, dann ist $f^{-1}[f[A]] \supset A$ und damit $f^{-1}[f[A]] \in \mathcal{F}$, also $f[A] \in f_*(\mathcal{F})$. Damit ist $\mathcal{B} \subset f_*(\mathcal{F})$. Sei andererseits $B \in f_*(\mathcal{F})$. Dann ist $B \supset f[f^{-1}[B]]$ und $f[f^{-1}[B]] \in \mathcal{B}$. Also ist \mathcal{B} eine Filterbasis von $f_*(\mathcal{F})$. \square

4.19 Proposition. Sei X ein Raum, $A \subset X$, $i: A \rightarrow X$ die Inklusionsabbildung und $x \in X$. Dann sind äquivalent:

(i) $x \in \bar{A}$.

(ii) Es gibt einen Filter \mathcal{F} auf A , so dass $i_*(\mathcal{F}) \rightarrow x$.

Beweis. „ \Leftarrow “ Sei \mathcal{F} ein Filter auf A , so dass $i_*(\mathcal{F}) \rightarrow x$, und $U \in \mathcal{U}(x)$. Es ist $U \in i_*(\mathcal{F})$, also $i^{-1}[U] \in \mathcal{F}$ und damit $U \cap A = i^{-1}[U] \neq \emptyset$. Es folgt $x \in \bar{A}$.

„ \Rightarrow “ Sei $x \in \bar{A}$ und

$$\mathcal{F} := \{U \cap A : U \in \mathcal{U}(x)\}.$$

Da $x \in \bar{A}$ ist $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Da $\mathcal{U}(x)$ ein Filter ist, folgt daraus, dass \mathcal{F} ein Filter ist, und nach Konstruktion ist $\mathcal{U}(x) \subset i_*(\mathcal{F})$, das heißt $i_*(\mathcal{F}) \rightarrow x$. \square

Stetigkeit

4.20 Proposition. Seien X, Y Räume, $x \in X$ und $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in x .

(ii) Für jeden Filter \mathcal{F} auf X , der gegen x konvergiert, konvergiert der Filter $f_*(\mathcal{F})$ gegen $f(x)$.

Beweis. Ist \mathcal{F} ein Filter auf X , der gegen x konvergiert, also \mathcal{F} feiner als $\mathcal{U}(x)$, so ist $f_*(\mathcal{F})$ feiner als $f_*(\mathcal{U}(x))$. (ii) gilt daher genau dann, wenn $f_*(\mathcal{U}(x)) \rightarrow f(x)$. Letzteres heißt gerade, dass $\mathcal{U}(f(x)) \subset f_*(\mathcal{U}(x))$, dass also $f^{-1}[V] \in \mathcal{U}(x)$ für jedes $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Dies ist aber die Definition der Stetigkeit von f in x . \square

Häufungspunkte

4.21 Definition. Sei X ein Raum, $x \in X$ und \mathcal{F} ein Filter auf X . x heißt Häufungspunkt von \mathcal{F} , wenn $U \cap A \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ und $A \in \mathcal{F}$.

4.22 Proposition. Sei \mathcal{F} ein Filter auf X und $x \in X$. Dann ist x genau dann Häufungspunkt von \mathcal{F} , wenn es eine Verfeinerung von \mathcal{F} gibt, die gegen x konvergiert.

Beweis. Dies ist gerade Lemma 4.17 angewandt auf \mathcal{F} und $\mathcal{U}(x)$. \square

Verfeinerungen von Filtern spielen also die Rolle, die Teilfolgen in metrischen Räumen spielen.

Kompaktheit

4.23 Proposition. *Ein Raum ist genau dann quasikompakt, wenn in ihm jeder Filter einen Häufungspunkt besitzt.*

Wir bemerken zunächst:

4.24 Lemma. *Sei X ein Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) X ist quasikompakt.

(ii) Für jede Menge \mathcal{A} von abgeschlossenen Teilmengen von X mit

$$\bigcap \mathcal{E} \neq \emptyset \quad \text{für alle endlichen } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$$

ist $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus der Definition der Quasikompaktheit durch Übergang zu Komplementen und Kontraposition. \square

Beweis der Proposition. Sei \mathcal{F} ein Filter auf X . Wir bemerken zunächst, dass

$$H := \bigcap \mathcal{H} \quad \text{mit} \quad \mathcal{H} := \{\bar{A} : A \in \mathcal{F}\}$$

die Menge der Häufungspunkte von \mathcal{F} ist. Nun sind alle endlichen Schnitte von Elementen aus \mathcal{H} nicht-leer, da ja schon alle endlichen Schnitte von Elementen von \mathcal{F} nicht-leer, da selbst in \mathcal{F} , sind. Ist X quasikompakt, so ist also $H \neq \emptyset$.

Sei nun X nicht quasikompakt. Dann existiert eine Menge \mathcal{A} von abgeschlossenen Teilmengen von X , so dass wir für $\mathcal{B} := \{\bigcap \mathcal{E} : \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \text{ endlich}\}$ haben, dass $\emptyset \notin \mathcal{B}$ aber $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$. Da \mathcal{B} offenbar unter endlichen Schnitten abgeschlossen ist, ist \mathcal{B} eine Filterbasis. Sei nun \mathcal{F} der von \mathcal{B} erzeugte Filter. Dann ist $\bigcap \{\bar{A} : A \in \mathcal{F}\} \subset \bigcap \{\bar{A} : A \in \mathcal{A}\} = \bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, also \mathcal{F} ohne Häufungspunkte. \square

Initialtopologien

Wir untersuchen, wann Filter in via Initialtopologien definierten Räumen konvergieren, und rechtfertigen damit insbesondere, Produkte als Räume punktweiser Konvergenz zu bezeichnen.

4.25 Proposition. *Es sei X ein Raum, der die Initialtopologie bezüglich einer Menge von Abbildungen $f_j: X \rightarrow Y_j$, $j \in J$, trage. Dann konvergiert ein Filter \mathcal{F} auf X genau dann gegen einen Punkt x , wenn für jedes $k \in J$ der Filter $(f_k)_*(\mathcal{F})$ auf Y_k gegen $f_k(x)$ konvergiert.*

Beweis. Sei $x \in X$ und \mathcal{F} ein Filter auf X . Gilt $\mathcal{F} \rightarrow x$, so auch $(f_k)_*(\mathcal{F}) \rightarrow f_k(x)$ für alle $k \in J$, da die f_k stetig sind. Sei nun andererseits \mathcal{F} derart, dass $(f_k)_*(\mathcal{F}) \rightarrow f_k(x)$ für alle $k \in J$. Für $k \in J$ und $U \in \mathcal{U}(f_k(x))$ ist dann $U \in (f_k)_*(\mathcal{F})$, also $f_k^{-1}[U] \in \mathcal{F}$. Aus der Konstruktion der Initialtopologie, Proposition 3.6, folgt aber, dass die Menge

$$\left\{ \bigcap_{r=1}^n f_{k_r}^{-1}[U_r] : n \in \mathbb{N}, k_r \in J, U_r \in \mathcal{U}(f_{k_r}(x)) \right\}$$

eine Umgebungsbasis von x , also eine Filterbasis von $\mathcal{U}(x)$ ist. Da \mathcal{F} unter endlichen Schnitten abgeschlossen ist, enthält \mathcal{F} diese Menge. Damit ist \mathcal{F} eine Verfeinerung von $\mathcal{U}(x)$. \square

Als Anwendung können wir die folgende Tatsache mit Filtern beweisen. Wir behaupten nicht, dass es ohne Filter nicht ebenso einfach ginge, bemerken aber, dass der Beweis so formal ist, dass man die Definition eines Filters und der Konvergenz für ihn gar nicht zu kennen bräuchte.

4.26 Proposition. *Es sei X ein Raum, der die Initialtopologie bezüglich einer Menge von Abbildungen $f_j: X \rightarrow Y_j$, $j \in J$, trage, und die Räume Y_j seien hausdorffsch. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (i) X is hausdorffsch.
- (ii) Die Menge $\{f_j: j \in J\}$ trennt Punkte, das heißt zu je zwei Punkten $x, x' \in X$, $x \neq x'$ existiert ein $j \in J$ mit $f_j(x) \neq f_j(x')$.

Beweis. Wir benutzen die Charakterisierung von Hausdorffräumen als Räume, in denen Grenzwerte eindeutig sind, aus Proposition 4.16.

„ \Leftarrow “ Seien $x, x' \in X$ und \mathcal{F} ein Filter auf X mit $\mathcal{F} \rightarrow x$ und $\mathcal{F} \rightarrow x'$. Für beliebiges $j \in J$ folgt dann $(f_j)_*(\mathcal{F}) \rightarrow f_j(x)$ und $(f_j)_*(\mathcal{F}) \rightarrow f_j(x')$ und damit, da Y_j hausdorffsch ist, $f_j(x) = f_j(x')$. Da aber die f_j Punkte trennen, folgt $x = x'$, also sind Grenzwerte in X eindeutig. Damit ist X hausdorffsch.

„ \Rightarrow “ Es seien $x, x' \in X$ gegeben, so dass $f_j(x) = f_j(x')$ für alle $j \in J$. Es sei nun \mathcal{F} ein Filter, der gegen x konvergiert, beispielsweise $\mathcal{F} = \mathcal{U}(x)$ oder der Filter mit Basis $\{\{x\}\}$. Aus $\mathcal{F} \rightarrow x$ folgt $(f_j)_*(\mathcal{F}) \rightarrow f_j(x) = f_j(x')$ für alle $j \in J$, also $\mathcal{F} \rightarrow x'$. Da X hausdorffsch ist, folgt $x = x'$. \square

4.27 Korollar. *Produkte von Hausdorffräumen sind hausdorffsch.* \square

Überlegt man sich nun, ob man ähnlich zeigen könnte, dass Produkte quasikompakter Räume quasikompakt sind, so besteht ein Problem darin, dass wir Quasikompaktheit via Häufungspunkten charakterisiert haben, für Produkte ein Kriterium für Konvergenz haben und der Zusammenhang zwischen Konvergenz und Häufungspunkten nicht eng genug ist. Doch Hilfe naht...

Ultrafilter und der Satz von Tychonoff

4.28 Definition. Ein Filter heißt *Ultrafilter*, wenn er keine echte Verfeinerung besitzt.

Eine etwas direktere Beschreibung ist die folgende.

4.29 Lemma. *Set \mathcal{F} ein Filter auf der Menge M . Dann ist \mathcal{F} genau dann ein Ultrafilter, wenn für jedes $A \subset M$ gilt, dass $A \in \mathcal{F}$ oder $M \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Beweis. Sei \mathcal{F} ein Filter und $A \subset M$, $A \notin \mathcal{F}$. Wir zeigen, dass \mathcal{F} genau dann eine Verfeinerung \mathcal{F}' mit $A \in \mathcal{F}'$ besitzt, wenn $M \setminus A \notin \mathcal{F}$. Dies zeigt die Behauptung.

Ist \mathcal{F}' eine solche Verfeinerung, so ist $(M \setminus A) \cap A = \emptyset \notin \mathcal{F}'$, also $M \setminus A \notin \mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$.

Ist andererseits ein $M \setminus A \notin \mathcal{F}$, so gibt es kein $B \in \mathcal{F}$ mit $B \subset M \setminus A$. In diesem Fall ist also $B \cap A \neq \emptyset$ für jedes $B \in \mathcal{F}$, und $\mathcal{F} \cup \{A\}$ eine Filterbasis. \square

Wir folgern daraus, dass Bilder von Ultrafiltern wieder Ultrafilter sind.

4.30 Proposition. *Seien M, N Mengen, \mathcal{F} ein Ultrafilter auf M und $f: M \rightarrow N$ eine Funktion. Dann ist $f_*(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter.*

Beweis. Ist $A \subset N$ und \mathcal{F} ein Ultrafilter, so ist entweder $f^{-1}[A] \in \mathcal{F}$ oder $f^{-1}[N \setminus A] = M \setminus f^{-1}[A] \in \mathcal{F}$ und damit $A \in f_*(\mathcal{F})$ oder $N \setminus A \in f_*(\mathcal{F})$, also ist $f_*(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter. \square

Das Praktische an Ultrafiltern ist, dass wir nicht zwischen Grenzwerten und Häufungspunkten zu unterscheiden brauchen.

4.31 Lemma. *Sei X ein Raum, $x \in X$ und \mathcal{F} ein Ultrafilter auf X . Dann konvergiert \mathcal{F} genau dann gegen x , wenn x Häufungspunkt von \mathcal{F} ist.*

Beweis. Ein Grenzwert ist immer auch Häufungspunkt. Ist andererseits x Häufungspunkt von \mathcal{F} , so hat \mathcal{F} nach Proposition 4.22 eine Verfeinerung, die gegen x konvergiert. Da \mathcal{F} aber gar keine echte Verfeinerung besitzt, muss es sich dabei um \mathcal{F} handeln. \square

Wenn Ultrafilter so praktisch sind, muss man sich natürlich fragen, wie viele es davon überhaupt gibt. Glücklicherweise liefert sie uns das Zornsche Lemma in ausreichender Anzahl.

4.32 Proposition. *Jeder Filter besitzt eine Verfeinerung, die ein Ultrafilter ist.*

Beweis. Sei \mathcal{F} ein Filter auf einer Menge M . Wir betrachten die Menge aller Verfeinerungen von \mathcal{F} und ordnen sie durch Inklusion. Die Proposition behauptet nun gerade, dass diese Halbordnung ein maximales Element besitzt. Vermöge des Zornschen Lemmas genügt es zum Beweis, zu zeigen, dass jede Kette eine obere Schranke besitzt. Sei also \mathcal{C} eine Kette. Dann ist $\mathcal{G} := \bigcup \mathcal{C}$ ein Filter: Da $\mathcal{C} \neq \emptyset$ und $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ für alle $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}$, ist $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Da $\emptyset \notin \mathcal{F}'$ für alle $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}$, ist $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Sind $A, B \in \mathcal{G}$, so existiert, da \mathcal{C} eine Kette ist, ein $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}$ mit $A, B \in \mathcal{F}'$ und es ist $A \cap B \in \mathcal{F}' \subset \mathcal{G}$. \mathcal{G} ist also Filter und offenbar obere Schranke von \mathcal{C} . \square

4.33 Proposition. *Sei X ein Raum. X ist genau dann quasikompakt, wenn jeder Ultrafilter auf X konvergiert.*

Beweis. Ist X quasikompakt, so hat nach Proposition 4.23 jeder Filter auf X einen Häufungspunkt, nach Lemma 4.31 ist dann also jeder Ultrafilter konvergent. Ist X derart, dass jeder Ultrafilter auf X konvergiert, so hat jeder Filter auf X nach Proposition 4.32 eine konvergente Verfeinerung, also einen Häufungspunkt. Damit ist X nach Proposition 4.23 quasikompakt. \square

4.34 Satz (Tychonoff). *Seien J eine Menge und X_j für $j \in J$ quasikompakte Räume. Dann ist auch der Produktraum $\prod_{j \in J} X_j$ quasikompakt.*

Beweis. Sei \mathcal{F} ein Ultrafilter auf $\prod_j X_j$. Nach Proposition 4.30 sind dann auch alle $(p_j)_*(\mathcal{F})$, p_j hier wieder die kanonischen Projektionen, Ultrafilter. Da die X_j quasikompakt sind, existiert nach Proposition 4.33 zu jedem $j \in J$ ein x_j mit $(p_j)_*(\mathcal{F}) \rightarrow x_j$. Für $x = (x_j)_{j \in J}$ gilt nun nach Proposition 4.25 $\mathcal{F} \rightarrow x$. Da also jeder Ultrafilter auf $\prod_j X_j$ konvergiert, ist $\prod_j X_j$ nach Proposition 4.33 quasikompakt. \square

Da dieser Beweis nun wirklich schön, kurz und konzeptionell war, bemerken wir: Der Satz von Tychonoff ist durchaus tief. Die Eleganz des Beweises, die hoffentlich auch in der vorliegenden Darstellung erkennbar ist, zeugt davon, dass Konvergenz von Filtern eine gute Theorie ist. Außerdem beruht dieser Satz darauf, überhaupt erst die richtigen Definitionen für Kompaktheit und die Produkttopologie gefunden zu haben.

Man beachte auch, dass wir im Beweis an zwei Stellen das Auswahlaxiom benutzt haben: Zunächst in Gestalt des Zornschen Lemmas beim Beweis von Proposition 4.32 und im eigentlichen Beweis, als wir zu jedem der Filter $(p_j)_*(\mathcal{F})$ einen Grenzwert gewählt haben. Will man den Satz von Tychonoff nur für kompakte (also hausdorffsche) Räume beweisen, so ist diese zweite Anwendung natürlich überflüssig. Es ist bekannt und nicht schwer zu zeigen, dass der Satz von Tychonoff wie wir ihn formuliert haben, also für quasikompakte Räume, zum Auswahlaxiom äquivalent ist, während Proposition 4.32 und damit die Fassung für kompakte Räume echt schwächer ist, der Satz von Tychonoff aber auch in dieser Fassung nicht in der üblichen Mengenlehre ohne Auswahlaxiom bewiesen werden kann.

Abschnitt 5

Trennen durch Mengen und Funktionen

Trennungsaxiome

Wir haben gesehen, dass die Eigenschaft ‚hausdorffsch‘ eine wichtige Rolle spielt. Wir werden nun verwandte Eigenschaften vorstellen, die später Verwendung finden werden.

Definitionen und erste Eigenschaften

5.1 Definition. Sei X ein Raum. Ein Raum heißt ein T_i -Raum, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, wenn er die entsprechende der folgenden Eigenschaften erfüllt.

- (T_1) Für alle $x_0, x_1 \in X$ mit $x_0 \neq x_1$ existiert eine offene Menge $O \subset X$ mit $x_0 \in O, x_1 \notin O$.
- (T_2) Für alle $x_0, x_1 \in X$ mit $x_0 \neq x_1$ existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $x_i \in O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.
- (T_3) Für alle Punkte $x \in X$ und abgeschlossenen Mengen $A \subset X$ mit $x \notin A$ existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $x \in O_0, A \subset O_1$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.
- (T_4) Für alle abgeschlossenen Mengen $A_0, A_1 \subset X$ existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $A_i \subset O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.

Der Raum X heißt *regulär*, wenn er T_3 und T_1 erfüllt, *normal*, wenn er T_4 und T_1 erfüllt.

5.2 Proposition.

- ▷ T_1 -Räume sind genau die Räume, in denen alle einelementigen Mengen abgeschlossen sind.
- ▷ T_2 -Räume erfüllen T_1 .
- ▷ Reguläre Räume erfüllen T_2 .

▷ Normale Räume sind regulär.

□

5.3 Bemerkung. Alle nicht in der Definition oder dieser Proposition notierten Implikationen gelten nicht. Zum Beispiel gibt es T_3 -Räume, die nicht T_2 erfüllen, und T_4 -Räume, die nicht T_3 erfüllen.

Wir erinnern an eine einfache Umformulierung, die wir bereits als Übung gezeigt haben.

5.4 Proposition. Ein Raum X ist genau dann ein T_2 -Raum, wenn für jeden Punkt $x \in X$

$$\{x\} = \bigcap \{\bar{U} : U \in \mathcal{U}(x)\}$$

gilt.

□

Für T_3 haben wir eine ähnliche Charakterisierung.

5.5 Proposition. Ein Raum X ist genau dann ein T_3 -Raum, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $\{\bar{U} : U \in \mathcal{U}(x)\}$ eine Umgebungsbasis von x ist.

Beweis. Sei $x \in X$.

Sei X ein T_3 -Raum und $V \in \mathcal{U}(x)$, also $x \notin \overline{X \setminus V}$. Dann existieren offene disjunkte Mengen U, U' mit $x \in U$ und $\overline{X \setminus V} \subset U'$. Es ist also $U \in \mathcal{U}(x)$ und $\bar{U} \subset X \setminus U' \subset X \setminus \overline{X \setminus V} \subset V$. Damit ist $\{\bar{U} : U \in \mathcal{U}(x)\}$ eine Umgebungsbasis von x .

Sei nun andererseits $\{\bar{U} : U \in \mathcal{U}(x)\}$ eine Umgebungsbasis von x und $A \subset X$ abgeschlossen, $x \notin A$. Dann ist $X \setminus A$ eine Umgebung von x , also existiert ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $\bar{U} \subset X \setminus A$. Es ist also $x \in \text{int } U =: O_0$, $A \subset X \setminus \bar{U} =: O_1$ und O_0, O_1 offen und disjunkt. □

Beispiele

Die folgenden Überlegungen werden zeigen, dass kompakte Räume normal sind. Die Zwischenschritte sind es aber wert, notiert zu werden.

5.6 Proposition. Sei X ein T_2 -Raum, $K \subset X$ kompakt. Dann ist

$$K = \bigcap \{\bar{O} : O \supset K, O \text{ offen}\}.$$

Beweis. Sei $x \in X \setminus K$. Es ist zu zeigen, dass eine offene Menge O mit $K \subset O$ und $x \notin \bar{O}$ existiert.

Da $\{x\} = \bigcap \{\bar{U} : U \in \mathcal{U}(x)\}$, ist $\{K \setminus \bar{U} : U \in \mathcal{U}(x)\}$ eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, existieren $n \in \mathbb{N}$ und $U_k \in \mathcal{U}(x)$, $1 \leq k \leq n$, so dass

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n (X \setminus \bar{U}_k) = X \setminus \bigcap_{k=1}^n \bar{U}_k =: O.$$

O ist offen und

$$X \setminus \bar{O} = \text{int} \bigcap_{k=1}^n \bar{U}_k \supset \bigcap_{k=1}^n \text{int} U_k \ni x.$$

□

5.7 Proposition. Sei X ein T_2 -Raum, $K_0, K_1 \subset X$ kompakt und disjunkt. Dann existieren offene Mengen $O_0, O_1 \subset X$ mit $K_i \subset O_i$ und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.

Beweis. Wir wiederholen den vorherigen Beweis mit K_0 an der Stelle von x , K_1 an der Stelle von K und der soeben gezeigten Eigenschaft an der Stelle der Hausdorff-Eigenschaft.

Da $K_0 = \bigcap \{\bar{U} : U \supset K_0, U \text{ offen}\}$, ist $\{K_1 \setminus \bar{U} : U \supset K_0, U \text{ offen}\}$ eine offene Überdeckung von K_1 . Da K_1 kompakt ist, existieren $n \in \mathbb{N}$ und offene $U_k \supset K_0$, $1 \leq k \leq n$, so dass

$$K_1 \subset \bigcup_{k=1}^n (X \setminus \bar{U}_k) = X \setminus \bigcap_{k=1}^n \bar{U}_k =: O_1.$$

O_1 ist offen und mit

$$O_0 := X \setminus \bar{O}_1 = \text{int} \bigcap_{k=1}^n \bar{U}_k = \bigcap_{k=1}^n \text{int} \bar{U}_k \supset \bigcap_{k=1}^n U_k \supset K_0.$$

ist auch O_0 offen und $O_0 \cap O_1 = \emptyset$. □

5.8 Korollar. Kompakte Räume sind normal. □

5.9 Proposition. Metrisierbare Räume sind normal.

Beweis. Sei X ein Raum, d eine Metrik auf X , die die Topologie induziert und $A_0, A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Für $i, j \in \{0, 1\}$, $i \neq j$, $x \in A_i$ setze $\varepsilon_x := \frac{1}{2} \inf \{d(x, x') : x' \in A_j\}$. Da $x \in \text{int}(X \setminus A_j)$, ist $\varepsilon_x > 0$. Mit $O_i := \bigcup_{x \in A_i} B_{\varepsilon_x}(x)$ ist O_i offen und $A_i \subset O_i$. Ist nun $x \in A_0$, $y \in A_1$, so ist $\varepsilon_x \leq \frac{1}{2}d(x, y)$ und $\varepsilon_y \leq \frac{1}{2}d(y, x)$. Für beliebiges $z \in X$ folgt $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y) = \frac{1}{2}d(x, y) + \frac{1}{2}d(y, x) \geq \varepsilon_x + \varepsilon_y$, also $z \notin B_{\varepsilon_x} \cap B_{\varepsilon_y}$. Damit ist $O_0 \cap O_1 = \emptyset$. □

Vererbung

Die ersten drei Trennungsaxiome vererben sich aber auf Unterräume und Produkte, wie wir jetzt zeigen werden. Für T_4 gilt das nicht, was wir hier allerdings nicht zeigen werden.

5.10 Proposition. Erfüllt ein Raum die Eigenschaft T_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, so erfüllen auch alle seine Unterräume diese Eigenschaft.

Beweis. Wir betrachten nur T_3 , die anderen Fälle sind einfacher.

Sei X ein T_3 -Raum und $Y \subset X$ ein Unterraum. Sei $x \in Y$, $A \subset Y$ abgeschlossen in Y und $x \notin A$. Dann existiert ein abgeschlossenes $A' \subset X$ mit $A' \cap Y = A$. Da $x \notin A'$, existieren in X offene, disjunkte Mengen U, V mit $x \in U$, $A' \subset V$. Nun sind $U \cap Y$ und $V \cap Y$ disjunkt und offen in Y , $x \in U \cap Y$, $A \subset V \cap Y$. \square

5.11 Proposition. *Ein Produkt von T_i -Räumen, $i \in \{1, 2, 3\}$ erfüllt T_i .*

Beweis. Wir betrachten wieder nur T_3 .

Seien also J eine Menge und X_j für $j \in J$ Räume, die T_3 erfüllen. Sei nun $x \in \prod_{j \in J} X_j$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass für beliebiges $U \in \mathcal{U}(x)$ ein abgeschlossenes $U' \in \mathcal{U}(x)$ mit $U' \subset U$ existiert. Nun existieren für $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $n \in \mathbb{N}$ und für $1 \leq k \leq n$ Indizes $j_k \in J$ und $V_k \in \mathcal{U}(x_{j_k})$ mit

$$\bigcap_{k=1}^n (p_{j_k})^{-1}[V_k] \subset U.$$

Da die Räume X_j Eigenschaft T_3 erfüllen, existieren abgeschlossene $V'_k \in \mathcal{U}(x_{j_k})$ mit $V'_k \subset V_k$. Nun ist

$$U' := \bigcap_{k=1}^n (p_{j_k})^{-1}[V'_k] \subset U$$

und U' eine abgeschlossene Umgebung von x . \square

Reellwertige Funktionen

In diesem Abschnitt behandeln wir Räume, die in gewisser Hinsicht viele stetige reellwertige Funktionen zulassen. Zunächst zeigen wir, dass normale Räume zu diesen gehören. Danach betrachten wir vollständig reguläre Räume, eine Klasse von Räumen, die per Definition viele stetige reellwertige Funktionen zulassen. Sehr spezielle reellwertige Funktionen sind Metriken; ein einfacher Metrisationssatz für vollständig reguläre Räume schließt sich an.

Normale Räume

Wir formulieren zunächst die Trennungseigenschaft T_4 analog zu Proposition 5.5 um.

5.12 Proposition. *Ein Raum X ist genau dann ein T_4 -Raum, wenn für jede abgeschlossene Menge A und jede offene Menge O mit $A \subset O$ eine offene Menge U mit $A \subset U \subset \bar{U} \subset O$ existiert.*

Beweis. Sei X ein T_4 -Raum und $A \subset O \subset X$, A abgeschlossen, O offen. Da $X \setminus O$ abgeschlossen und disjunkt zu A ist, existieren offene $U, V \subset X$ mit $A \subset U$, $X \setminus O \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$. Es ist dann $\overline{U} \subset X \setminus V \subset O$.

Hat andererseits X die Eigenschaft aus der Proposition und sind $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen, so existiert eine offene Menge U mit $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus B$. Für die offene Menge $V := X \setminus \overline{U}$ gilt dann $U \cap V = \emptyset$ und $B \subset V$. Damit ist X ein T_4 -Raum. \square

5.13 Satz (Urysohnsches Lemma). *Sei X ein T_4 -Raum und $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann existiert eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ mit $f[A] \subset \{0\}$, $f[B] \subset \{1\}$*

Beweis. Sei $D_n := \{\frac{m}{2^n} : 0 \leq m \leq 2^n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Wir zeigen zunächst, dass es offene Mengen U_d , $d \in D$ mit $A \subset U_0$, $U_1 = X \setminus B$ und $\overline{U}_d \subset U_e$ für alle $d, e \in D$ mit $d < e$. Setze dazu $U_1 := X \setminus B$ und wähle mit Hilfe der vorhergehenden Proposition U_0 , so dass $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset X \setminus B$. Ist nun $n \in \mathbb{N}$ und U_d für alle $d \in D_n$ definiert, so setzen wir die Definition für alle $d \in D_{n+1}$ wie folgt fort. Für alle $d = \frac{m}{2^{n+1}}$ mit geraden m ist U_d bereits definiert. Ist nun m ungerade, so ist $\overline{U}_{\frac{m-1}{2^{n+1}}} \subset U_{\frac{m+1}{2^{n+1}}}$ und wir können $U_{\frac{m}{2^{n+1}}}$ so wählen, dass $\overline{U}_{\frac{m-1}{2^{n+1}}} \subset U_{\frac{m}{2^{n+1}}} \subset \overline{U}_{\frac{m}{2^{n+1}}} \subset U_{\frac{m+1}{2^{n+1}}}$.

Für diese U_d definieren wir nun

$$f: X \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \begin{cases} \inf \{d \in D : x \in U_d\}, & x \in U_1 \\ 1, & x \notin U_1 \end{cases}$$

Es ist offenbar $f[A] \subset \{0\}$ und $f[B] \subset \{1\}$. Seien nun $r, s \in [0, 1]$. Es sind $f^{-1}[[0, r]] = \bigcup_{d < r} U_d$ und $f^{-1}[(s, 1]] = \bigcup_{d > s} (X \setminus U_d) = \bigcup_{d > s} (X \setminus \overline{U}_d)$ offen, dabei gilt die letzte Gleichheit, da zu jedem $d \in D$ mit $d > s \geq 0$ ein $d' \in D$ mit $d > d' > s$ existiert. Da $\{[0, r) : r \in [0, 1]\} \cup \{(s, 1] : s \in [0, 1]\}$ eine Subbasis der Topologie von $[0, 1]$ ist, zeigt das die Stetigkeit von f . \square

5.14 Bemerkung. Das charakterisiert die T_4 -Räume, denn ist $f: X \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion mit $f[A] \subset \{0\}$ und $f[B] \subset \{1\}$, so sind $f^{-1}[[0, \frac{1}{2}]]$ und $f^{-1}[(\frac{1}{2}, 1]]$ offene Mengen, die A und B trennen.

Bevor wir fortfahren, müssen wir uns vergewissern, dass ein Konzept, das wir aus der Analysis I für den Raum \mathbb{R} kennen, auch allgemeiner sinnvoll ist.

5.15 Definition. Sei M eine Menge und (Y, d) ein metrischer Raum. Wir sagen, eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n: M \rightarrow Y$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $g: M \rightarrow Y$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|g(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ und $m \geq n$.

5.16 Proposition. Sei X ein topologischer Raum, (Y, d) ein metrischer Raum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $g: X \rightarrow Y$ konvergiert. Dann ist g stetig.

Beweis. Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in X$ und eine Umgebung U von x , so dass $f[U] \subset B_{\varepsilon/3}(f(x))$. Damit ist

$$\begin{aligned} |g(x') - g(x)| &\leq |g(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x' \in U$, und g ist in x stetig. \square

Als nächstes wollen wir zeigen, dass sich in T_4 -Räumen auf abgeschlossenen Teilmengen definierte stetige reellwertige Funktionen auf den ganzen Raum fortsetzen lassen. Wir beginnen mit einem Teilergebnis.

5.17 Lemma. Ist X ein T_4 -Raum, $A \subset X$ abgeschlossen, $b \in \mathbb{R}$ und $f: A \rightarrow [0, b]$ stetig, so existiert eine stetige Funktion $g: X \rightarrow [0, \frac{1}{3}b]$ mit $0 \leq f(x) - g(x) \leq \frac{2}{3}b$ für alle $x \in A$.

Beweis. Setze $B_0 := f^{-1}[[0, \frac{1}{3}b]]$ und $B_1 := f^{-1}[[\frac{2}{3}b, b]]$. Nach dem Urysohnschen Lemma existiert dann eine stetige Funktion $h: X \rightarrow [0, 1]$ mit $h[B_0] \subset \{0\}$, $h[B_1] \subset \{1\}$. Mit $g(x) := \frac{1}{3}b \cdot h(x)$ erhält man eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. \square

5.18 Satz (Tietze). Ist X ein T_4 -Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $f: A \rightarrow [0, 1]$ stetig, so existiert eine stetige Funktion $F: X \rightarrow [0, 1]$ mit $F|_A = f$.

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $f_0 := f$. Nun verschaffen wir uns rekursiv für $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen $f_n: A \rightarrow [0, (\frac{2}{3})^n]$ und $g_n: X \rightarrow [0, \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n]$ mit $f_{n+1}(x) = f_n(x) - g_n(x)$ für alle $x \in A$. Den Rekursionsschritt liefert dabei Lemma 5.17.

Da $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n) = 1$, ist die Reihe $\sum g_n$ gleichmäßig konvergent und definiert eine stetige Funktion $F: X \rightarrow [0, 1]$ durch $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$. Für $x \in A$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=0}^n g_k(x) &= f_0(x) - (f_0(x) - f_1(x)) - (f_1(x) - f_2(x)) - \cdots - (f_n(x) - f_{n+1}(x)) \\ &= f_{n+1}(x), \end{aligned}$$

und da $f_n: A \rightarrow [0, (\frac{2}{3})^n]$ und $(\frac{2}{3})^n \rightarrow 0$ folgt $F|_A = f$. \square

Vollständig reguläre Räume

Wir fügen der Liste der Trennungseigenschaften noch eine weitere hinzu.

5.19 Definition. Sei X ein Raum. Wir sagen, X sei ein T_{3a} -Raum, wenn er die folgende Eigenschaft erfüllt.

(T_{3a}) Zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ mit $x \notin A$ existiert eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ mit $f(x) = 0$ und $f[A] \subset \{1\}$.

Ein Raum heißt *vollständig regulär*, wenn er T_{3a} und T_1 erfüllt.

5.20 Proposition. T_{3a} -Räume erfüllen T_3 . □

5.21 Proposition. Normale Räume sind vollständig regulär.

Beweis. Gegeben eine abgeschlossene Menge A und ein $x \notin A$ wende man das Urysohnschen Lemma auf $\{x\}$ und A an. □

Die folgende Proposition zeigt die Bedeutung der Existenz reellwertiger stetiger Funktionen, wie sie für T_{3a} -Räume gegeben ist.

5.22 Lemma. Sind X ein Raum, J eine Menge und $f_j: X \rightarrow [0, 1]$ stetige Funktionen, so dass für jeden Punkt $x \in X$ und jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ mit $x \notin A$ ein $j \in J$ mit $f_j(x) = 0$ und $f_j[A] \subset \{1\}$ existiert, so trägt X die Initialtopologie bezüglich der f_j .

Beweis. Da die f_j als stetig vorausgesetzt sind, reicht es nach der Konstruktion der Initialtopologie aus Proposition 3.6, noch zu zeigen, dass für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x ein $j \in J$ und eine offene Menge $V \subset [0, 1]$ mit $x \in f_j^{-1}[V] \subset U$ existieren. Nach Voraussetzung existiert aber ein $j \in J$, so dass $f_j(x) = 0$ und $f_j[X \setminus U] \subset \{1\}$, also $x \in f_j^{-1}[[0, 1]] \subset U$. □

Die Eigenschaft, Initialtopologie bezüglich einer Menge von Funktionen zu sein, wollen wir umformulieren.

5.23 Proposition. Sei X ein Raum, Y_j für $j \in J$ Räume und $f_j: X \rightarrow Y_j$ Funktionen. Dann trägt der Raum X genau dann die Initialtopologie bezüglich der Funktionen f_j , $j \in J$, wenn er die Initialtopologie bezüglich der Funktion $(f_j)_{j \in J}: X \rightarrow \prod_{j \in J} Y_j$ trägt.

Beweis. Aus der universellen Eigenschaft der Produkttopologie folgt:

- ▷ $(f_j)_{j \in J}$ ist genau dann stetig, wenn f_j für alle $j \in J$ stetig ist.
- ▷ Ist Z ein Raum und $g: Z \rightarrow X$ eine Funktion, so ist $(f_j)_{j \in J} \circ g$ genau dann stetig, wenn $f_j \circ g$ für alle $j \in J$ stetig ist.

Die Behauptung folgt damit unmittelbar aus der universellen Eigenschaft der Initialtopologie in Definition 3.1. \square

5.24 Proposition. *Ist X ein vollständig regulärer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so existieren eine abzählbare Menge C und eine Einbettung $h: X \rightarrow [0, 1]^C$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass X eine abzählbare Menge von Funktionen besitzt, die die Bedingungen aus Lemma 5.22 erfüllt. Sei dazu \mathcal{B} eine abzählbare Basis der Topologie von X . Zu jedem Paar $(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ wählen wir, wenn eine solche existiert, eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ mit $f[U] \subset \{0\}$ und $f[X \setminus V] \subset \{1\}$. Dies liefert uns eine abzählbare Menge C von Funktionen.

Ist nun $x \in X$ und $A \subset X$ abgeschlossen mit $x \notin A$, so existiert ein $V \in \mathcal{B}$ mit $x \in V \subset X \setminus A$ und, da X ein T_{3a} -Raum ist, eine stetige Funktion $g: X \rightarrow [0, 1]$ mit $g(x) = 0$ und $g[X \setminus V] \subset 1$. Betrachten wir nun die stetige Funktion

$$t: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$s \mapsto \begin{cases} 0, & s \leq \frac{1}{2} \\ 2s - 1, & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

und setzen wir $g' := t \circ g$, so ist $(g')^{-1}[\{0\}] \supset g^{-1}[[0, \frac{1}{2})]$ eine Umgebung von x , also existiert ein $U \in \mathcal{B}$ mit $x \in U$ und $g'[U] \subset \{0\}$. Da überhaupt eine Funktion, nämlich g' , mit diesen Eigenschaften existiert, existiert auch ein $f \in C$ mit $f(x) \in f[U] = \{0\}$ und $f[A] \subset f[X \setminus V] \subset \{1\}$.

Da also C die Voraussetzungen von Lemma 5.22 erfüllt, trägt X die Initialtopologie bezüglich der $f \in C$. Mit Proposition 5.23 umformuliert trägt X die Initialtopologie bezüglich der Abbildung

$$h: X \rightarrow [0, 1]^C$$

$$x \mapsto h(x)$$

$$h(x)_f := f(x).$$

Es ist nur noch zu zeigen, dass h injektiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn C Punkte trennt, wenn es also zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ immer ein $f \in C$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt. Da aber X ein T_1 -Raum ist, ist in dieser Situation $\{y\}$ abgeschlossen und die Argumentation des letzten Absatzes angewandt auf x und $\{y\}$ liefert ein $f \in C$ mit $f(x) = 0 \neq 1 = f(y)$. \square

5.25 Proposition. *Abzählbare Produkte metrisierbarer Räume sind metrisierbar.*

Beweis. Als Aufgabe. \square

5.26 Satz. *Ist X ein vollständig regulärer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so ist X metrisierbar.*

Beweis. Nach Proposition 5.24 und Proposition 5.25 ist X homöomorph zu einem Unterraum eines metrisierbaren Raumes. \square

Dies ist ein recht schwacher Metritionsatz, doch wir wollen uns mit ihm begnügen. Mehr zu diesem Thema findet man in [Que73, Kap. 10]. Dort erfährt man zum Beispiel, dass Regularität an Stelle von vollständiger Regularität ausreicht hätte.

Abschnitt 6

Kompaktifizierungen

Kompaktifizierungen

6.1 Definition. Sei X ein Raum. Eine *Kompaktifizierung* von X ist ein kompakter Raum K zusammen mit einer Einbettung $e: X \rightarrow K$, so dass $e[X]$ dicht in K ist.

6.2 Bemerkung. Um eine Kompaktifizierung zu besitzen, muss X natürlich hausdorffsch sein. Mehr noch: Da kompakte Räume vollständig regulär sind und sich vollständige Regularität auf Unterräume vererbt (das zeigt man wie für Regularität), muss X vollständig regulär sein. Wir werden bald sehen, dass vollständig reguläre Räume tatsächlich immer eine Kompaktifizierung besitzen.

6.3 Beispiele.

- ▷ Die stereographische Projektion liefert eine Einbettung $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, so dass $\mathbb{S}^n \setminus s[\mathbb{R}^n]$ aus einem einzigen Punkt besteht. Da für $n > 0$ kein Punkt von \mathbb{S}^n isoliert ist, ist in diesem Fall $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ eine Kompaktifizierung von \mathbb{R}^n . (Zum Fall $n = 0$ beachte, dass \mathbb{R}^0 selbst kompakt ist.)

Genau dann konvergiert für eine Folge (a_n) in \mathbb{R} die Folge $(s(a_n))$ gegen diesen zusätzlichen Punkt, wenn die ursprüngliche Folge bestimmt gegen unendlich konvergiert. Man kann sich diese Kompaktifizierung also so vorstellen, dass ein unendlich ferner Punkt zu \mathbb{R}^n hinzugefügt wurde.

- ▷ Die Abbildung

$$t: \mathbb{R}^n \rightarrow D^n$$
$$x \mapsto \frac{\|x\|}{1 + \|x\|^2} \cdot x$$

bildet \mathbb{R}^n homöomorph auf das Innere der Scheibe ab und ist daher auch eine Kompaktifizierung von \mathbb{R}^n . Für den Fall $n = 1$ entspricht das dem Hinzufügen eines Punktes $+\infty$ und eines Punktes $-\infty$ zu \mathbb{R} .

- ▷ Die Inklusion $\mathbb{Q} \cap I \rightarrow I$ ist eine Kompaktifizierung von $\mathbb{Q} \cap I$. Im Gegensatz zu den vorhergehenden Beispielen ist hier $\mathbb{Q} \cap I$ nicht offen in I . Dies liegt daran, dass \mathbb{Q} nicht die Eigenschaft der lokalen Kompaktheit besitzt, eine Eigenschaft, die wir bald definieren werden.

6.4 Definition. Sei X ein Raum. Zwei Kompaktifizierungen $e_1: X \rightarrow K_1$ und $e_2: X \rightarrow K_2$ heißen äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $h: K_1 \rightarrow K_2$ gibt, so dass $h \circ e_1 = e_2$, also

$$\begin{array}{ccc} & & K_1 \\ & e_1 \nearrow & \downarrow \approx \\ X & & \\ & e_2 \searrow & \downarrow h \\ & & K_2 \end{array}$$

kommutiert.

Allgemeiner definieren wir Morphismen zwischen Kompaktifizierungen eines Raumes. Dies definiert eine Kategorie, aber man muss nicht wissen, was das ist.

6.5 Definition. Seien X ein Raum und $e_1: X \rightarrow K_1$ und $e_2: X \rightarrow K_2$ Kompaktifizierungen. Ein *Morphismus* von e_1 nach e_2 ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & K_1 \\ & e_1 \nearrow & \downarrow \approx \\ X & & \\ & e_2 \searrow & \downarrow f \\ & & K_2, \end{array}$$

also eine stetige Abbildung $f: K_1 \rightarrow K_2$ mit $f \circ e_1 = e_2$.

6.6 Lemma. Seien X ein Raum und $e_1: X \rightarrow K_1$ und $e_2: X \rightarrow K_2$ Kompaktifizierungen. Existiert ein Morphismus von e_1 nach e_2 , so ist er eindeutig bestimmt und die ihn konstituierende Abbildung $K_1 \rightarrow K_2$ surjektiv.

Beweis. Ist $f: K_1 \rightarrow K_2$ stetig, so ist $f[K_1]$ kompakt und daher abgeschlossen. Ist $f \circ e_1 = e_2$, so ist $f[K_1] \supset f[e_1[X]] = e_2[X]$, also $f[K_1]$ dicht in K_2 . Damit ist $f[K_1] = K_2$.

Erfüllen $f_1, f_2: K_1 \rightarrow K_2$ beide $f_i \circ e_1 = e_2$, so stimmen sie auf der dichten Teilmenge $e_1[X]$ überein und sind daher, wie wir in einer Aufgabe gezeigt haben, gleich. Wir beweisen es aber hier in der Hoffnung, dass es instruktiv ist, noch einmal: Sei $y \in K_1$. Da e_1 eine Einbettung¹ mit dichtem Bild ist, existiert ein Filter \mathcal{F} auf X , so dass $(e_1)_*(\mathcal{F}) \rightarrow y$. Da f_i stetig ist, gilt $f_*((e_1)_*(\mathcal{F})) \rightarrow f_i(y)$. Nun ist $f_*((e_1)_*(\mathcal{F})) = (f \circ e_1)_*(\mathcal{F})$, also $(e_2)_*(\mathcal{F}) \rightarrow f_i(y)$. Da K_2 hausdorffsch ist, ist dieser Grenzwert eindeutig, also $f_1(y) = f_2(y)$. \square

¹Das bräuchten wir nicht, aber es erspart uns ein Argument.

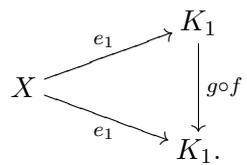
Existiert ein Morphismus von $e_1: X \rightarrow K_1$ nach $e_2: X \rightarrow K_2$, so können wir also K_1 als die größere der beiden Kompaktifizierungen auffassen. Außerdem folgt, dass die Isomorphismen in dieser Kategorie genau die bereits definierten Äquivalenzen sind. Wieder muss man nicht wissen, was das bedeutet.

6.7 Lemma. *Seien X ein Raum und $e_1: X \rightarrow K_1$ und $e_2: X \rightarrow K_2$ Kompaktifizierungen. Existieren Morphismen*



so sind e_1 und e_2 äquivalente Kompaktifizierungen.

Beweis. Durch Komposition erhalten wir den Morphismus



Da wir gezeigt haben, dass Morphismen eindeutig sind, muss $g \circ f = \text{id}_{K_1}$ gelten. Ebenso ergibt sich $f \circ g = \text{id}_{K_2}$. Damit ist f ein Homöomorphismus. \square

Lokale Kompaktheit und die Ein-Punkt-Kompaktifizierung

6.8 Definition. Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann setzen wir $X^+ := X \cup \{\infty\}$, wobei ∞ irgendein Punkt sei, der nicht in X ist, und versehen X^+ mit der Topologie

$$\mathcal{T} := \{O \subset X : O \text{ offen in } X\} \cup \{X^+ \setminus K : K \subset X \text{ kompakt}\}.$$

6.9 Proposition. *Die Menge \mathcal{T} aus der Definition ist tatsächlich eine Topologie auf X^+ , die Inklusion $X \rightarrow X^+$ ist eine Einbettung, und X ist offen in X^+ .*

Beweis. Wir bezeichnen die erste Menge aus der Definition von \mathcal{T} mit \mathcal{T}_X , die zweite mit \mathcal{T}_∞ , also $\mathcal{T}_X = \{O \in \mathcal{T} : \infty \notin O\}$, $\mathcal{T}_\infty = \{O \in \mathcal{T} : \infty \in O\}$.

Dass X offen in X^+ ist, ist klar. Dass die Inklusion eine Einbettung ist, heißt gerade, dass die Topologie, die X als Unterraum von X^+ erhält, die ursprüngliche ist. Da \mathcal{T}_X gerade diese ursprüngliche Topologie von X ist,

bleibt nur zu zeigen, dass $O \cap X \in \mathcal{T}_X$ für alle $O \in \mathcal{T}_\infty$. Das gilt aber, da kompakte Teilmengen eines Hausdorff-Raumes abgeschlossen sind.

Sei nun $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$. Ist $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}_X$, so ist, da ja \mathcal{T}_X eine Topologie auf X ist, $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}$. Ist $\mathcal{O} \not\subset \mathcal{T}_X$, so existiert eine kompakte Teilmenge K von X mit $X^+ \setminus K \in \mathcal{O}$, und $\bigcup \mathcal{O} = X^+ \setminus (K \setminus \bigcup \mathcal{O})$. Da aber $X \cap \bigcup \mathcal{O}$ offen in X ist, ist $K \setminus \bigcup \mathcal{O}$ kompakt, also $X^+ \setminus (K \setminus \bigcup \mathcal{O}) \in \mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $O_i \in \mathcal{T}$ für $1 \leq i \leq n$. Ist $O_i \in \mathcal{T}_\infty$ für alle i , so ist $X^+ \setminus O_i$ für alle i eine kompakte Teilmenge von X , also auch $\bigcup_{i=1}^n (X^+ \setminus O_i)$ und $\bigcap_{i=1}^n O_i = X^+ \setminus \bigcup_{i=1}^n (X^+ \setminus O_i) \in \mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}$. Existiert ein i mit $O_i \notin \mathcal{T}_\infty$, so ist $\bigcap_i O_i \subset X$, also, da wir schon gesehen haben, dass $O \cap X \in \mathcal{T}_X$ für alle $O \in \mathcal{T}$, $\bigcap_{i=1}^n O_i = \bigcap_{i=1}^n (O_i \cap X) \in \mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}$. \square

6.10 Proposition. *Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann ist X^+ quasikompakt.*

Beweis. Sei \mathcal{C} eine offene Überdeckung von X^+ . Dann existiert ein $O \in \mathcal{C}$ mit $\infty \in O$. Da $X^+ \setminus O$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge von \mathcal{C} , die $X^+ \setminus O$ überdeckt. Zusammen mit O ergibt dies eine endliche Teilmenge von \mathcal{C} , die X^+ überdeckt. \square

6.11 Proposition. *Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann ist genau dann X dicht in X^+ , wenn X nicht kompakt ist.*

Beweis. Genau dann ist X nicht dicht in X^+ , wenn $\{\infty\}$ offen ist, wenn also $X^+ \setminus \{\infty\} = X$ kompakt ist. \square

6.12 Proposition. *Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann ist genau dann X^+ hausdorffsch, wenn jeder Punkt $x \in X$ in X eine kompakte Umgebung besitzt.*

Beweis. Da X hausdorffsch ist, ist X^+ genau dann hausdorffsch, wenn zu jedem $x \in X$ offene Mengen $U, V \subset X^+$ mit $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ und $\infty \in V$ existieren, wenn also zu jedem $x \in X$ eine offene Menge $V \subset X^+$ mit $\infty \in V$ existiert, so dass $X^+ \setminus V$ eine Umgebung von x ist. Betrachtet man das Komplement von V , so ergibt sich die Behauptung. \square

6.13 Definition. Sei X ein Raum. X heißt *lokal kompakt*, wenn X hausdorffsch ist und jeder Punkt von x eine kompakte Umgebung besitzt.

Wir fassen zusammen:

6.14 Definition und Proposition. *Ist X ein lokal kompakter, nicht kompakter Raum, so ist X^+ (zusammen mit der Inklusion $X \rightarrow X^+$) eine Kompaktifizierung von X . Diese nennen wir die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von X .* \square

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung

Konstruktion

6.15 Notation. Für beliebige Räume Y, Z setzen wir

$$C(Y, Z) := \{f: Y \rightarrow Z: f \text{ stetig}\}.$$

6.16 Definition. Sei X ein vollständig regulärer Raum. Wir setzen mit $I = [0, 1]$

$$\begin{aligned} \Phi: X &\rightarrow I^{C(X, I)} \\ x &\mapsto (\mu(x))_{\mu \in C(X, I)}, \end{aligned}$$

das heißt, wir haben $\Phi(x)(\mu) = \mu(x)$, und

$$\beta X := \overline{\Phi[X]}.$$

Wir nennen $\Phi: X \rightarrow \beta X$ die *Stone-Čech-Kompaktifizierung* von X , was wir sogleich rechtfertigen werden.**6.17 Proposition.** Sei X ein vollständig regulärer Raum. $\Phi: X \rightarrow \beta X$ ist eine Kompaktifizierung von X .

Beweis. Da X ein T_{3a} -Raum ist, trägt X nach Lemma 5.22 und Proposition 5.23 die Initialtopologie bezüglich der Abbildung Φ . Da X zusätzlich ein T_1 -Raum ist, trennt $C(X, I)$ Punkte, und Φ ist injektiv, also eine Einbettung. $\Phi[X]$ ist nach Definition dicht in βX . Da I kompakt ist, ist nach dem Satz von Tychonoff auch $I^{C(X, I)}$ kompakt, also auch die abgeschlossene Teilmenge βX . \square

Funktorialität

6.18 Definition und Proposition. Sind X, Y, Z Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Funktion, so induziert f eine Funktion

$$\begin{aligned} f^*: C(Y, Z) &\rightarrow C(X, Z) \\ g &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

6.19 Definition und Proposition. Sind X ein Raum und J_1, J_2 Mengen, so induziert eine Funktion $t: J_1 \rightarrow J_2$ eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} t^*: X^{J_2} &\rightarrow X^{J_1} \\ x &\mapsto x \circ t. \end{aligned}$$

Beweis. Es bezeichne für $i \in \{1, 2\}$, $j \in J_i$, p_j^i die Projektion

$$\begin{aligned} p_j^i: X^{J_i} &\rightarrow X \\ x &\mapsto x(j). \end{aligned}$$

Für beliebiges $j \in J_1$ und $x \in X^{J_2}$ ist dann $p_j^1(t^*(x)) = (x \circ t)(j) = x(t(j)) = p_{t(j)}^2(x)$, also $p_j^1 \circ t^* = p_{t(j)}^2$. Damit ist für alle $j \in J_1$ die Abbildung $p_j^1 \circ t^*$ stetig. Es folgt, dass t^* stetig ist. \square

6.20 Proposition. Seien X, Y vollständig reguläre Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Dann ist $f^{**}: I^{C(X,I)} \rightarrow I^{C(Y,I)}$ eine stetige Abbildung und $f^{**} \circ \Phi^X = \Phi^Y \circ f$. Insbesondere ist $f^{**} [\overline{\Phi[X]}] \subset \overline{\Phi[Y]}$.

Beweis. Wir rechnen $f^{**} \circ \Phi^X = \Phi^Y \circ f$ nach: Für $x \in X$ und $\mu \in C(Y, I)$ ist

$$\begin{aligned} (f^{**} \circ \Phi^X)(x)(\mu) &= (\Phi^X(x) \circ f^*)(\mu) = \Phi^X(x)(\mu \circ f) = \\ &= (\mu \circ f)(x) = \mu(f(x)) = \Phi^Y(f(x))(\mu). \end{aligned}$$

\square

Dies ermöglicht die folgende Definition.

6.21 Definition. Seien X, Y vollständig reguläre Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \beta f: \beta X &\rightarrow \beta Y \\ x &\mapsto f^{**}(x). \end{aligned}$$

Ebenfalls gezeigt haben wir:

6.22 Proposition. Seien X, Y vollständig reguläre Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Dann ist βf stetig und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi^X} & \beta X \\ \downarrow f & & \downarrow \beta f \\ Y & \xrightarrow{\Phi^Y} & \beta Y \end{array}$$

kommutiert. \square

Universelle Eigenschaft

6.23 Proposition. Sei X vollständig regulär, K kompakt und $f: X \rightarrow K$ stetig. Dann existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung \tilde{f} von f auf βX , also eine stetige Funktion \tilde{f} , so dass

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & \beta X \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & K \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass $\Phi[X]$ dicht in βX ist. Zur Existenz betrachte

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi^X} & \beta X \\ \downarrow f & & \downarrow \beta f \\ K & \xrightarrow{\Phi^K} & \beta K \end{array}$$

und bemerke, dass, da K kompakt und $\Phi^K[K]$ dicht in βK ist, $\Phi^K[K] = \beta K$ also Φ^K ein Homöomorphismus ist. Setze nun $\tilde{f} := (\Phi^K)^{-1} \circ \beta f$. \square

Insbesondere gilt das, wenn f eine Kompaktifizierung ist. Dies charakterisiert die Stone-Čech-Kompaktifizierung.

6.24 Proposition. Sei X ein vollständig regulärer Raum, $e: X \rightarrow K$ eine Kompaktifizierung. Genau dann ist $e: X \rightarrow K$ äquivalent zur Stone-Čech-Kompaktifizierung, wenn für jede Kompaktifizierung $e': X \rightarrow K'$ eine stetige Abbildung $g: K \rightarrow K'$ existiert, so dass

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e} & K \\ & \searrow e' & \downarrow g \\ & & K' \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Das folgt sofort aus Proposition 6.23 und Lemma 6.7. \square

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung eines diskreten Raumes

Für diskrete Räume steht uns ein alternativer Weg, die Stone-Čech-Kompaktifizierung zu konstruieren, offen, der in diesem Fall weitere Einblicke in ihre Struktur erlaubt.

Sei M ein diskreter Raum. Wir ersetzen in der Definition der Stone-Čech-Kompaktifizierung den Raum I durch den diskreten Raum $\{0, 1\}$. Da jede

Abbildung von einem diskreten Raum stetig ist, können wir $C(M, \{0, 1\})$ mit $\mathcal{P}(M)$ identifizieren, indem wir eine Teilmenge durch ihre charakteristische Funktion ersetzen. Dies führt zu

$$\begin{aligned}\Psi: M &\rightarrow \{0, 1\}^{\mathcal{P}(M)}, \\ x &\mapsto (\chi_A(x))_{A \subset M},\end{aligned}$$

also $p_A \circ \Psi = \chi_A$, wobei p_A die Projektion bezeichne, und

$$\tilde{\beta}M := \overline{\Psi[M]}.$$

Es ist zunächst zu zeigen, dass Ψ eine Einbettung ist. Die Komponentenfunktionen sind gerade die Abbildungen $\chi_A: M \rightarrow \{0, 1\}$. Da $\chi_A^{-1}[\{1\}] = A$, ist die diskrete Topologie die Initialtopologie bezüglich der Abbildungen χ_A und die Abbildung Ψ injektiv. Damit ist dies gezeigt.

Die Abbildung $\Psi: M \rightarrow \tilde{\beta}M$ ist also eine Kompaktifizierung. Wir werden zeigen, dass sie äquivalent zu $\Phi: M \rightarrow \beta M$ ist. Zunächst jedoch untersuchen wir die Punkte von $\tilde{\beta}M$. Da $\Psi: M \rightarrow \tilde{\beta}M$ eine Einbettung mit dichtem Bild ist, ist jeder Punkt in $y \in \tilde{\beta}M$ Grenzwert von $\Psi_*(\mathcal{F})$ für einen Filter \mathcal{F} auf M . Es sei ein solcher gegeben, also $(p_A)_*(\Psi_*(\mathcal{F})) \rightarrow y_A$ für alle $A \subset M$. Für $y_A = 1$ ist dann $\{1\} \in (p_A)_*(\Psi_*(\mathcal{F})) = (p_A \circ \Psi)_*(\mathcal{F}) = (\chi_A)_*(\mathcal{F})$, also $\mathcal{F} \ni \chi_A^{-1}[\{1\}] = A$. Für $y_A = 0$ ist ebenso $\mathcal{F} \ni \chi_A^{-1}[\{0\}] = M \setminus A$. Es ist also \mathcal{F} ein Ultrafilter und y seine charakteristische Funktion. Dies zeigt, dass die Punkte von $\tilde{\beta}M$ in Bijektion zu Ultrafiltern auf M stehen.

Um zu zeigen, dass die Kompaktifizierungen $\tilde{\beta}M$ und βM äquivalent sind, betrachten wir das durch Proposition 6.23 gegebene kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & \beta M \\ & \searrow \Psi & \downarrow \tilde{\Psi} \\ & & \tilde{\beta}M. \end{array}$$

Da das Bild von $\tilde{\Psi}$ dicht und kompakt ist, ist $\tilde{\Psi}$ surjektiv, und es genügt, die Injektivität nachzuprüfen, um zu zeigen, dass $\tilde{\Psi}$ ein Homöomorphismus ist. Seien $z, z' \in \beta M$. Wieder gibt es Filter $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ auf M , so dass $\Phi_*(\mathcal{F}) \rightarrow z$, $\Phi_*(\mathcal{F}') \rightarrow z'$, also $\Psi_*(\mathcal{F}) = \tilde{\Psi}_*(\Phi_*(\mathcal{F})) \rightarrow \tilde{\Psi}_*(z)$ und $\Psi_*(\mathcal{F}') \rightarrow \tilde{\Psi}_*(z')$. Ist also $\tilde{\Psi}(z) = \tilde{\Psi}(z')$, so müssen nach der vorangegangenen Diskussion $\tilde{F} = \tilde{F}'$ gelten, da beides Ultrafilter mit der charakteristischen Funktion $\tilde{\Psi}(z)$ sind. Damit ist aber auch $z = z'$.

Alternativ dazu hätten wir direkt nachprüfen können, dass $\tilde{\beta}M$ die universelle Eigenschaft aus Proposition 6.24 hat. Gegeben $e: M \rightarrow K$ hätte man zur Vervollständigung von

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Psi} & \tilde{\beta}M \\ & \searrow e & \vdots g \\ & & K \end{array}$$

für $y \in \tilde{\beta}M$ den Wert $g(y)$ durch $e_*(\mathcal{F}) \rightarrow g(y)$ definieren können, wobei \mathcal{F} der eindeutige Filter auf M mit $\Psi_*(\mathcal{F}) \rightarrow y$ ist. Die Stetigkeit von g hätte sich dann elementar nachrechnen lassen.

Bemerkungen

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung ist für den geometrisch Interessierten weniger wichtig als für Mengentheoretiker und gewisse Analytiker. Sie ist im allgemeinen sehr gross und kompliziert. Zum Beispiel ist $\#\beta\mathbb{N} = \#\mathcal{P}(\mathbb{R})$, und es gibt topologische Eigenschaften von $\beta\mathbb{N}$, die unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre sind.

Andererseits muss die Stone-Čech-Kompaktifizierung nicht gross sein: Es gibt Räume, für die die Stone-Čech-Kompaktifizierung und die Ein-Punkt-Kompaktifizierung (bis auf Äquivalenz) übereinstimmen. In diesem Fall folgt mit Proposition 6.24, dass der Raum bis auf Äquivalenz genau eine Kompaktifizierung besitzt.

Abschnitt 7

Finaltopologien und Quotienten

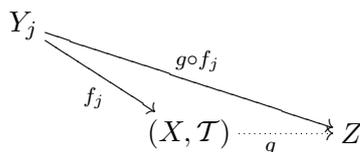
Finaltopologien

Durch Umkehren der Pfeile erhalten wir dual zur Definition von Initialtopologien die Definition von Finaltopologien.

Wir beginnen mit zwei Definitionen. Diese sind recht abstrakt, aber wir werden sogleich sehen, dass sie uns bereits Bekanntes verallgemeinern.

7.1 Definition. Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j: Y_j \rightarrow X$ Funktionen für $j \in J$. Wir nennen eine Topologie \mathcal{T} auf X *Finaltopologie bezüglich der f_j* , wenn folgendes gilt:

- (i) Die $f_j: Y_j \rightarrow (X, \mathcal{T})$ sind stetig.
- (ii) Für alle Räume Z und Funktionen $g: X \rightarrow Z$ gilt: Sind alle $g \circ f_j: Y_j \rightarrow Z$ stetig, so ist $g: (X, \mathcal{T}) \rightarrow Z$ stetig.



Bei der *Initialtopologie* steht der Raum X *vorne* an den zu f_j gehörigen Pfeilen, bei der *Finaltopologie* steht er *hinten*.

7.2 Beispiel. Sind X, Y Räume, Y quasikompakt und X hausdorffsch und $p: Y \rightarrow X$ eine stetige Surjektion, so ist die Topologie von X Finaltopologie bezüglich p . Das haben wir in Proposition 2.33 gezeigt.

7.3 Beispiel. Sei X ein Raum, seien $Y_j, j \in J$, Unterräume von X und $X = \bigcup_{j \in J} Y_j$. Sind alle Y_j offen in X , so trägt X die Finaltopologie bezüglich der Inklusionsabbildungen $i_j: Y_j \xrightarrow{\subset} X$, denn einerseits sind die Inklusionsabbildungen stetig, andererseits gilt für eine Funktion $g: X \rightarrow Z$ und $x \in U_j$, dass, wenn $g \circ i_j = g|_{U_j}$ stetig ist, g stetig in x ist. Sind also alle $g \circ i_j$ stetig, so ist g stetig.

Ebenso trägt X die Initialtopologie, wenn alle Y_j abgeschlossen in X sind und J endlich ist. Ist nämlich wieder $g: X \rightarrow Z$ und sind alle $g \circ f_j$ stetig, so ist für abgeschlossenes $A \subset Z$ und $j \in J$ die Menge $(g \circ f_j)^{-1}[A] = f_j^{-1}[g^{-1}[A]] = g^{-1}[A] \cap Y_j$ abgeschlossen in Y_j und damit auch in X . Also ist $g^{-1}[A] = \bigcup_{j \in J} (g^{-1}[A] \cap Y_j)$ abgeschlossen und damit g stetig.

Dies benutzen wir häufig, wenn wir stetige Abbildungen stückweise definieren.

7.4 Proposition. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j: Y_j \rightarrow X$ Funktionen für $j \in J$. Es seien \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 Topologien auf X , so dass \mathcal{T}_1 Eigenschaft (i) aus der Definition der Finaltopologie hat und \mathcal{T}_2 Eigenschaft (ii). Dann ist \mathcal{T}_1 gröber als \mathcal{T}_2 .*

Beweis. Dual zu Proposition 3.4 □

7.5 Korollar. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j: Y_j \rightarrow X$ Funktionen für $j \in J$. Existiert die Finaltopologie bezüglich der f_j , so ist sie eindeutig bestimmt.* □

Die Finaltopologie ist die feinste Topologie, so dass die f_j stetig sind, und wieder müssen nur noch die Frage der Existenz klären. Die Konstruktion stellt sich sogar als einfacher als bei der Initialtopologie heraus.

7.6 Proposition. *Sei X eine Menge, J eine beliebige Indexmenge, und seien Y_j Räume und $f_j: Y_j \rightarrow X$ Funktionen für $j \in J$. Dann ist*

$$\mathcal{T} := \left\{ O \subset X : f_j^{-1}[O] \text{ offen in } Y_j \text{ für alle } j \in J \right\}$$

die Finaltopologie auf X bezüglich der f_j .

Beweis. Zunächst ist zu bemerken, dass \mathcal{T} tatsächlich eine Topologie ist, da f^{-1} mit Vereinigungen und Schnitten vertauscht. Dass die $f_j: Y_j \rightarrow (X, \mathcal{T})$ stetig sind, ist offensichtlich. Sei nun Z ein Raum und $g: X \rightarrow Z$ eine Funktion, so dass $g \circ f_j$ für alle $j \in J$ stetig ist. Für offenes $U \subset Z$ ist dann für alle $j \in J$ die Menge $(g \circ f_j)^{-1}[U] = f_j^{-1}[g^{-1}[U]]$ offen, also $g^{-1}[U] \in \mathcal{T}$. Damit ist $g: (X, \mathcal{T}) \rightarrow Z$ stetig. □

Spezialfälle

Quotienten

7.7 Definition. Seien X, Y Räume. Eine Abbildung $q: X \rightarrow Y$ heißt *Quotientenabbildung*, wenn q surjektiv ist und Y die Finaltopologie bezüglich q ist. Diese Topologie auf Y nennen wir die *Quotiententopologie* bezüglich q .

Summen

7.8 Notation. Sei J eine beliebige Menge und M_j eine Menge für alle $j \in J$. Das *Koprodukt* der M_j ist

$$\coprod_{j \in J} M_j := \bigcup_{j \in J} (M_j \times \{j\}).$$

Die *kanonischen Inklusionen* sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} i_k: M_k &\rightarrow \coprod_{j \in J} M_j, & k \in J, \\ x &\mapsto (x, k). \end{aligned}$$

Die Idee hinter der Konstruktion $M_j \times \{j\}$ ist nur, dass so ganz sicher für $j \neq j'$ die Mengen $M_j \times \{j\}$ und $M_{j'} \times \{j'\}$ disjunkt sind. Sind M_j und $M_{j'}$ für alle $j, j' \in J$ mit $j \neq j'$ ohnehin disjunkt, können wir auch einfach $\coprod_{j \in J} M_j = \bigcup_{j \in J} M_j$ und $i_k(x) = x$ setzen.

7.9 Definition. Seien J eine beliebige Menge und X_j topologische Räume für $j \in J$. Die *topologische Summe* $\coprod_{j \in J} X_j$ ist das Koprodukt der zugrunde liegenden Mengen versehen mit der Finaltopologie bezüglich der kanonischen Inklusionen.

7.10 Notation. Wir schreiben auch $X_0 + \cdots + X_{n-1}$ für $\coprod_{j \in \{0, \dots, n-1\}} X_j$.

Äquivalenzrelationen

Quotiententopologien formalisieren das anschauliche Konzept des Verklebens von Räumen an Punkten. Um das besser zu verstehen, beschäftigen wir uns kurz mit surjektiven Abbildungen und ihrem Zusammenhang mit Äquivalenzrelationen.

Seien zunächst M, N Mengen und $f: M \rightarrow N$ eine Funktion. Dann definiert f eine Äquivalenzrelation \sim_f auf M durch $x \sim_f x' :\Leftrightarrow f(x) = f(x')$. Ist andererseits \sim eine Äquivalenzrelation auf M und bezeichnet M/\sim die Menge der Äquivalenzklassen, so definiert dies eine surjektive Funktion $q: M \rightarrow M/\sim$ durch $q(x) := [x]_\sim$. Ist nun \sim eine Äquivalenzrelation, q die zugehörige Surjektion auf die Äquivalenzklassen und \sim_q die hierdurch definierte Relation, so ist offenbar $\sim_q = \sim$. Ist andererseits $f: M \rightarrow N$ surjektiv, so existiert genau eine Bijektion $M/\sim_f \rightarrow N$, die

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow_{x \mapsto [x]} & \uparrow \\ & & M/\sim_f \end{array}$$

kommutativ macht. Wenn einen also nicht interessiert, was die Elemente von N sind —und bei Räumen schauen wir uns ja meist nicht an, was ein ‚Punkt‘ ist—, so wird die Surjektion f vollständig durch die Relation \sim_f beschrieben.

Wir legen entsprechend noch Notation fest.

7.11 Notation. Ist X ein Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf X , so bezeichnet X/\sim den Raum, der aus der Menge der Äquivalenzklassen bezüglich \sim versehen mit der Finaltopologie bezüglich der kanonischen Surjektion $X \rightarrow X/\sim$ besteht.

Als Beispiel betrachten wir auf dem Einheitsintervall I die Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\iff x = y \vee (x = 0 \wedge y = 1) \vee (x = 1 \wedge y = 0),$$

also die von $0 \sim 1$ erzeugte Äquivalenzrelation. Den entstehenden Raum I/\sim kann man sich nun so vorstellen, dass die Punkte 0 und 1 zu einem Punkt *identifiziert* wurden, dass also die beiden Enden des Einheitsintervalls *zusammengeklebt* wurden. Die Anschauung sagt uns nun, dass dabei die Kreislinie herausgekommen sein sollte, und wir werden nun zeigen, dass sie uns nicht täuscht. Betrachten wir zunächst, wie schon mehrfach, die Abbildung

$$\begin{aligned} p: I &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist surjektiv und fast injektiv: Nur 0 und 1 haben den selben Wert. Es ist also p surjektiv und $p(x) = p(y) \iff x \sim y$. Damit haben wir wie oben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}^1 \\ & \searrow q & \uparrow h \\ & & I/\sim \end{array}$$

und müssen uns nur noch um Stetigkeit kümmern. p ist nach Konstruktion stetig. Da I/\sim die Quotiententopologie, also die Finaltopologie bezüglich q trägt, ist q stetig. Da $h \circ q = p$ stetig ist, ist auch h stetig, dies ist die zweite Eigenschaft der Finaltopologie und was Quotienten so angenehm macht. Wir wissen also bereits, dass h eine stetige Bijektion ist, und wollen nun zeigen, dass h in der Tat ein Homöomorphismus ist. Normalerweise müssten wir nun anfangen zu rechnen, aber wir haben Glück, dass I quasikompakt (sogar kompakt) und \mathbb{S}^1 hausdorffsch ist: Nach Proposition 2.33 ist dadurch nämlich auch p automatisch eine Quotientenabbildung. Um die Stetigkeit von h^{-1} nachzuweisen, genügt daher die Stetigkeit von $h^{-1} \circ p$, aber $h^{-1} \circ p = q$ ist stetig. Weil das so wichtig ist, hier das gleiche Argument noch

einmal etwas anders: Da I quasikompakt und q stetig und surjektiv ist, ist nach Proposition 2.32 auch I/\sim quasikompakt. (Man beachte, dass wir an dieser Stelle in der Tat ohne etwas nachzurechnen noch nicht wissen können, dass I/\sim hausdorffsch ist.) Nun ist h eine stetige Bijektion von einem quasikompakten Raum in einen Hausdorffraum also nach Korollar 2.36 ein Homöomorphismus.

Wir bemerken eine wichtige Tatsache, die wir nebenbei gezeigt haben, und die entsprechend auch für andere Fälle von Final- oder Initialtopologien gilt. Dies ist nur eine andere Art, deren Eindeutigkeit zu formulieren.

7.12 Lemma. *Seien X, Y_0, Y_1 Räume und $q_i: X \rightarrow Y_i$ Quotientenabbildungen. Ist für alle $x, x' \in X$ genau dann $q_0(x) = q_0(x')$, wenn $q_1(x) = q_1(x')$, so existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung h , so dass*

$$\begin{array}{ccc} & & Y_0 \\ & \nearrow^{q_0} & \downarrow h \\ X & & Y_1 \\ & \searrow_{q_1} & \end{array}$$

kommutiert, und h ist ein Homöomorphismus. □

Das Zusammenschlagen von Unterräumen

Für Fälle wie den eben betrachteten führen wir eine einfachere Notation ein.

7.13 Notation. Sei X ein Raum und $A \subset X$. Ist \sim die Äquivalenzrelation auf X mit

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x, y \in A),$$

die A zu einem Punkt identifiziert, so schreiben wir

$$X/A$$

für den Quotientenraum X/\sim . Sind etwas allgemeiner $A_1, \dots, A_n \subset X$ paarweise disjunkt und

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x, y \in A_1) \vee \dots \vee (x, y \in A_n),$$

so schreiben wir

$$X/(A_1, \dots, A_n)$$

für X/\sim .

7.14 Proposition. *Es ist $I/\{0, 1\} \approx \mathbb{S}^1$, und für $n \in \mathbb{N}$ ist $D^{n+1}/\mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$.*

Beweis. $I/\{0, 1\} \approx \mathbb{S}^1$ haben wir bereits gezeigt. Für $n \in \mathbb{N}$ wollen wir eine stetige Abbildung $D^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ angeben, die \mathbb{S}^n auf den Nordpol wirft und ansonsten injektiv ist. Eine solche Abbildung ist nicht schwer hinzuschreiben, aber unter Umständen muss man für die Stetigkeit arbeiten, und wir wollen sie uns lieber von Quotiententopologien schenken lassen. Betrachte dazu das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} & & D^{n+1} \\ & \nearrow f & \downarrow p \\ \mathbb{S}^n \times D^1 & & \mathbb{S}^{n+1} \\ & \searrow g & \end{array}$$

Hierbei seien f und g die stetigen Abbildungen

$$\begin{aligned} f: \mathbb{S}^n \times D^1 &\rightarrow D^{n+1} & g: \mathbb{S}^n \times D^1 &\rightarrow \mathbb{S}^{n+1} \\ (x, s) &\mapsto \frac{s+1}{2}x, & (x, s) &\mapsto (\sqrt{1-s^2} \cdot x_1, \dots, \sqrt{1-s^2} \cdot x_{n+1}, s) \end{aligned}$$

Diese sind beide surjektiv, und für $x, y \in \mathbb{S}^n \times D^1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\iff (x = y) \vee (x, y \in \mathbb{S}^n \times \{-1\}), \\ g(x) = g(y) &\iff (x = y) \vee (x, y \in \mathbb{S}^n \times \{-1\}) \vee (x, y \in \mathbb{S}^n \times \{1\}). \end{aligned}$$

Da also aus $f(x) = f(y)$ folgt, dass $g(x) = g(y)$, existiert eine Abbildung p , die das Diagramm kommutativ macht. Da f als stetige Surjektion von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum eine Quotientenabbildung ist, folgt die Stetigkeit von p aus der Stetigkeit von g . Da g surjektiv ist, ist auch p surjektiv. Mit dem gleichen Argument wie eben ist nun p eine Quotientenabbildung. Bemerken wir nun noch zusätzlich zu obigem, dass

$$f^{-1}[\mathbb{S}^n] = \mathbb{S}^n \times \{1\},$$

so folgt für $x', y' \in D^{n+1}$

$$p(x') = p(y') \iff (x' = y') \vee (x', y' \in \mathbb{S}^n)$$

und daraus mit Hilfe von Lemma 7.12, dass $D^{n+1}/\mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$. □

Wir führen noch etwas mehr Notation ein.

7.15 Definition. Sei X ein Raum. Dann nennen wir

$$CX := X \times I/X \times \{1\}$$

den *Kegel* über X und

$$\Sigma X := X \times I/(X \times \{0\}, X \times \{1\})$$

die *Einhängung* von X .

Im Beweis der letzten Proposition haben wir schon Beispiele kennengelernt:

7.16 Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $C\mathbb{S}^n \approx D^{n+1}$ und $\Sigma\mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^{n+1}$.

Beweis. Die Quotientenabbildungen f und g aus dem letzten Beweis zeigen, wieder mit Hilfe von Lemma 7.12, dass $(\mathbb{S}^n \times D^1)/(\mathbb{S}^n \times \{-1\}) \approx D^{n+1}$ und $(\mathbb{S}^n \times D^1)/(\mathbb{S}^n \times \{-1\}, \mathbb{S}^n \times \{1\}) \approx \mathbb{S}^{n+1}$. Ersetzt man D^1 durch das homöomorphe I und entsprechend $\{1, -1\}$ durch $\{0, 1\}$, so erhält man die Behauptung. \square

Projektive Räume

Bisher haben wir Quotienten betrachtet, die homöomorph zu Räumen waren, die wir bereits gut kannten. Spannender ist es, mit Hilfe von Quotienten neue Räume zu erschaffen.

Definition und erste Eigenschaften

7.17 Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Der n -dimensionale (reell-)projektive Raum, \mathbb{RP}^n , ist definiert durch

$$\mathbb{RP}^n := \mathbb{S}^n / \sim,$$

wobei für $x, y \in \mathbb{S}^n$

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x = -y).$$

Es werden also Antipoden identifiziert.

Wir sollten kurz zwei Begriffe einführen, auf die wir bisher verzichtet haben.

7.18 Definition. Seien X, Y Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. f heißt *offen*, wenn $f[O]$ für alle offenen $O \subset X$ offen ist, *abgeschlossen*, wenn $f[A]$ für jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ abgeschlossen ist.

Man mache sich klar, dass diese beiden Begriffe *nicht* äquivalent sind.

7.19 Lemma. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ die Quotientenabbildung, die sich aus der Definition des projektiven Raums ergibt. Dann ist p eine offene Abbildung.

Beweis. Es bezeichne $a: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ den Homöomorphismus $x \mapsto -x$. Ist nun $O \subset X$ offen, so ist $p^{-1}[p[O]] = O \cup a[O]$ offen, also $p[O]$ offen. \square

7.20 Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}$. \mathbb{RP}^n ist hausdorffsch.

Beweis. Seien $y, y' \in \mathbb{R}P^n$. Es seien p und a wie eben. Wir wählen $x, x' \in \mathbb{S}^n$ mit $p(x) = y$ und $p(x') = y'$. Seien nun U_0, U_0' offene disjunkte Umgebungen von x und x' und ebenso U_1, U_1' offene disjunkte Umgebungen von x und $-x'$. Setze nun $V := p[U_0 \cap U_1]$ und $V' := p[U_0' \cap a[U_1']]$. Da p eine offene Abbildung ist, sind V und V' offen, außerdem ist $y \in V$ und $y' \in V'$. Schließlich ist

$$\begin{aligned} p^{-1}[V \cap V'] &= ((U_0 \cap U_1) \cup a[U_0 \cap U_1]) \cap ((U_0' \cap a[U_1']) \cup (a[U_0'] \cap U_1')) \\ &= (U_0 \cap U_1 \cap U_0' \cap a[U_1']) \cup (U_0 \cap U_1 \cap a[U_0'] \cap U_1') \\ &\quad \cup (a[U_0 \cap U_1] \cap U_0' \cap a[U_1']) \cup (a[U_0 \cap U_1] \cap a[U_0'] \cap U_1') \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset, \end{aligned}$$

also $V \cap V' = \emptyset$. □

7.21 Bemerkung. Das wäre sicherlich etwas einfacher gegangen, hätte man die euklidische Metrik auf $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ benutzt, es sollte aber gezeigt werden, dass es auch ohne sie geht.

Eine andere Darstellung

Wir können die projektiven Räume auch auf eine andere Art erhalten.

7.22 Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist \sim die Äquivalenzrelation auf D^n mit

$$x \sim y \iff (x = y) \vee ((x, y \in \mathbb{S}^{n-1}) \wedge (x = -y)),$$

so ist $D^n / \sim \approx \mathbb{R}P^n$.

Beweis. Sei zunächst h der Homöomorphismus von D^n auf die obere Halbkugel von \mathbb{S}^n

$$\begin{aligned} h: D^n &\rightarrow \mathbb{S}^n, \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, (1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^{1/2}). \end{aligned}$$

Da zu jedem $y \in \mathbb{S}^n$ ein $x \in D^n$ mit $h(x) = y$ oder $h(x) = -y$ existiert, ist $p \circ h$ surjektiv. Da D^n kompakt und \mathbb{S}^n hausdorffsch ist, ist also $p \circ h$ eine Quotientenabbildung. Nun sieht man, dass für $x, x' \in D^n$ genau dann $(p \circ h)(x) = (p \circ h)(x')$ gilt, wenn $x \sim x'$. Mit Lemma 7.12 folgt die Behauptung. □

Projektive Räume zerteilt

Wir nehmen den projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ auseinander, um ihn dann wieder zusammensetzen.

Betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} n: \mathbb{S}^n &\rightarrow [0, 1], \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto |x_{n+1}|. \end{aligned}$$

Da $n(x) = n(-x)$, induziert sie eine Abbildung $\bar{n}: \mathbb{R}P^n \rightarrow [0, 1]$ mit $\bar{n} \circ p = n$. Wir wollen die Unterräume $Y := \bar{n}^{-1}[[0, 2^{-1/2}]]$, $X := \bar{n}^{-1}[[2^{-1/2}, 1]]$ und $X \cap Y = \bar{n}^{-1}[\{2^{-1/2}\}]$ näher untersuchen.

Der Unterraum X ist einfach zu verstehen, da $n^{-1}[[2^{-1/2}, 1]] = p^{-1}[X]$ aus zwei Komponenten besteht, die von der Antipodenabbildung aufeinander abgebildet werden. Eine von beiden ist das Bild der Einbettung

$$h: D^n \rightarrow \mathbb{S}^n,$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_n, 1)}{\sqrt{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2}}.$$

Die Abbildung $p \circ h: D^n \rightarrow X$ ist daher eine stetige Bijektion und, wieder Kompaktheit ausnutzend, nach Korollar 2.36 ein Homöomorphismus. Die Einschränkung auf \mathbb{S}^{n-1} hat gerade $X \cap Y$ als Bild, wir haben also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\approx} & X \cap Y \\ \text{inkl.} \downarrow & & \downarrow \text{inkl.} \\ D^n & \xrightarrow[p \circ h]{\approx} & X. \end{array}$$

Zur Beschreibung von Y betrachten wir die Abbildung

$$g: D^{n-1} \times D^1 \rightarrow \mathbb{S}^n,$$

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_{n-1}, \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}, y)}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Man überprüft leicht, dass $\text{im}(p \circ g) = Y$ und dass genau dann $(p \circ g)(x, y) = (p \circ g)(x', y')$, wenn $(x, y) = (x', y')$ oder wenn $x \in \mathbb{S}^{n-2}$ und $(x, y) = (-x', -y')$. Bezeichnen wir diese Äquivalenzrelation auf $D^{n-1} \times D^1$ mit \sim_M , so erhalten wir also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D^{n-1} \times D^1 & & \\ \downarrow & \searrow p \circ g & \\ (D^{n-1} \times D^1) / \sim_M & \xrightarrow[\bar{g}]{\approx} & Y. \end{array}$$

Dass die untere Abbildung, die wir \bar{g} nennen wollen, ein Homöomorphismus ist, folgt wieder mit Hilfe von Lemma 7.12 daraus, dass aufgrund der Kompaktheit von $D^{n-1} \times D^1$ die Surjektion $p \circ g$ nach Proposition 2.33 eine Quotientenabbildung ist.

Ist $n = 2$, so können wir die Relation \sim_M und damit den Raum

$$(D^1 \times D^1) / \sim_M \approx Y$$

besonders einfach beschreiben. Der Raum $D^1 \times D^1$ ist ein Quadrat, und der Unterraum $S^0 \times D^1$ besteht aus zwei gegenüberliegenden Seiten. Die Relation \sim_M identifiziert diese beiden mit einem Twist, also $(-1, y) \sim_M (1, -y)$. Den Raum $(D^1 \times D^1)/\sim_M$ nennen wir das *Möbiusband*.

Wir können nun Teile der obigen Diagramme zusammensetzen und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & D^n & \xrightarrow[p \circ h]{\cong} & X \\
 & \text{inkl.} & \nearrow & & \nearrow \text{inkl.} \\
 S^{n-1} & \xrightarrow{\cong} & X \cap Y & & \text{inkl.} \\
 & \searrow f & \searrow \text{inkl.} & & \searrow \text{inkl.} \\
 & & (D^{n-1} \times D^1)/\sim_M & \xrightarrow[\bar{g}]{\cong} & Y \\
 & & & & \nearrow \text{inkl.} \\
 & & & & \mathbb{R}P^n
 \end{array}$$

Dabei ist f durch die Kommutativität des unteren linken Vierecks definiert. Es lohnt sich, sich diese Abbildung noch einmal anzuschauen. Der Unterraum $D^{n-1} \times S^0$ von $D^{n-1} \times D^1$ besteht aus zwei getrennten $(n-1)$ -Bällen. Die Äquivalenzrelation \sim_M identifiziert von beiden die Ränder via $(x, 1) \sim_M (-x, -1)$ für $x \in S^{n-2}$. Als Quotientenraum erhält man eine $(n-1)$ -Sphäre. Die Abbildung f ist eine entsprechende Einbettung. Insbesondere sieht man für $n = 2$, dass der „Rand“ des Möbiusbandes, der aus den beiden nicht identifizierten Seiten des Quadrats entsteht, eine einzige 1-Sphäre bildet.

Da X und Y abgeschlossene Unterräume von $\mathbb{R}P^n$ sind, trägt $\mathbb{R}P^n$ die Finaltopologie bezüglich der Inklusionsabbildungen dieser beider Räume. Beschränkung auf das wesentliche liefert also aus obigem ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{\text{inkl.}} & D^n \\
 \downarrow f & & \downarrow p \circ h \\
 (D^{n-1} \times D^1)/\sim_M & \xrightarrow{\bar{g}} & \mathbb{R}P^n,
 \end{array}$$

wobei $\mathbb{R}P^n$ die Finaltopologie bezüglich der beiden Abbildungen $p \circ h$ und \bar{g} trägt. Dies ist äquivalent dazu, dass $\mathbb{R}P^n$ die Finaltopologie bezüglich der von ihnen gegebenen Abbildung

$$(D^{n-1} \times D^1)/\sim_M + D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$$

trägt. Diese Abbildung ist surjektiv, also eine Quotientenabbildung. Wir haben also

$$\mathbb{R}P^n \approx ((D^{n-1} \times D^1)/\sim_M + D^n) / \sim$$

für die entsprechende Äquivalenzrelation. Da die Abbildungen $p \circ h$ und \bar{g} injektiv sind und der Schnitt ihrer Bilder gerade das Bild von S^{n-1} unter $p \circ h$

ist, ist diese durch $x \sim f(x)$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gegeben. Wir werden diese Situation sogleich in Allgemeinheit genauer beschreiben und dafür die Notation

$$\mathbb{R}P^n \approx (D^{n-1} \times D^1) / \sim_M \cup_f D^n$$

einführen. Wir werden dann insbesondere sagen, dass die projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ durch Ankleben einer 2-Scheibe an den Rand eines Möbiusbandes entsteht.

Verkleben

Ein weiteres Konzept, das sich mit Hilfe von Quotientenräumen modellieren lässt, ist das Ankleben eines Raumes an einen anderen. Dazu betrachtet man Räume X, Y , eine Teilmenge $A \subset X$ und eine stetige Abbildung $f: A \rightarrow Y$. Man betrachtet nun $Y + X$ mit den kanonischen Inklusionen $i_0: Y \rightarrow Y + X$ und $i_1: X \rightarrow Y + X$ und auf $Y + X$ die Äquivalenzrelation \sim_f , die von $i_0(f(x)) \sim_f i_1(x)$, $x \in A$, erzeugt wird, also

$$\begin{aligned} i_0(y) \sim_f i_0(y') &\iff y = y' \\ i_0(y) \sim_f i_1(x) &\iff (x \in A) \wedge (f(x) = y), \\ i_1(x) \sim_f i_0(y) &\iff (x \in A) \wedge (f(x) = y), \\ i_1(x) \sim_f i_1(x') &\iff (x = x') \vee ((x, x' \in A) \wedge (f(x) = f(x'))). \end{aligned}$$

7.23 Notation. In dieser Situation bezeichnen wir den Quotientenraum $(Y + X) / \sim_f$ mit $Y \cup_f X$ und sagen, er entstehe, indem man X mittels f an Y anlebe. Bezeichnet $q: Y + X \rightarrow Y \cup_f X$ die Quotientenabbildung, so nennen wir

$$j: Y \xrightarrow{i_0} Y + X \xrightarrow{q} Y \cup_f X$$

die *kanonische Inklusion* und

$$\chi: X \xrightarrow{i_1} Y + X \xrightarrow{q} Y \cup_f X$$

die *charakteristische Abbildung*.

Wir bemerken, dass $Y \cup_f X$ die Finaltopologie bezüglich der Abbildungen j und χ trägt.

Die folgende Aussage ist nicht trivial, da in ihr Quotienten und Einbettungen vorkommen und sich Final- und Initialtopologien nicht immer gut vertragen.

7.24 Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f: A \rightarrow Y$ stetig. Dann ist die kanonische Inklusion $j: Y \rightarrow Y \cup_f X$ eine Einbettung.*

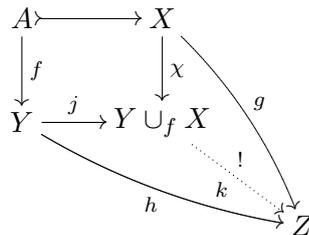
Beweis. Die Stetigkeit von j ist klar. Die Injektivität folgt daraus, dass $i_0(y) \sim_f i_0(y')$ nur für $y = y'$. Sei nun $V \subset Y$ offen. Es ist zu zeigen, dass es ein offenes $U \subset Y \cup_f X$ gibt, so dass $V = j^{-1}[U]$ ist.

Wir betrachten zunächst $j[V]$. Es ist $\chi^{-1}[j[V]] = f^{-1}[V]$ eine offene Teilmenge von A , also existiert eine offene Menge $U' \subset X$ mit $U' \cap A = f^{-1}[V]$. Wir setzen $U := j[V] \cup \chi[U']$. Es ist $j^{-1}[U] = j^{-1}[j[V]] \cup j^{-1}[\chi[U']] = V \cup f[U' \cap A] = V$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\chi^{-1}[U]$ offen ist. Es ist $\chi^{-1}[j[V]] = f^{-1}[V]$ und $\chi^{-1}[\chi[U']] = U' \cup f^{-1}[f[U' \cap A]] = U' \cup f^{-1}[f[f^{-1}[V]]] = U' \cup f^{-1}[V]$ und da $f^{-1}[V] \subset U'$ ist $\chi^{-1}[U] = U'$. \square

Wir übersetzen die universelle Eigenschaft (Definition 7.1) der Finaltopologie in unsere Situation.

7.25 Proposition. *Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f: A \rightarrow Y$ stetig. Ist Z ein weiterer Raum und sind $g: X \rightarrow Z, h: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen, so dass $g|_A = h \circ f$, so existiert genau eine stetige Abbildung $k: Y \cup_f X \rightarrow Z$, so dass $k \circ \chi = g$ und $k \circ j = h$.*



Beweis. Alles bis auf die Stetigkeit folgt unmittelbar aus der Definition von \sim_f , die Stetigkeit daraus, dass $Y \cup_f X$ die Finaltopologie bezüglich j und χ trägt. \square

Quotienten und Produkte

Wir werden ein weiteres Hilfsmittel benötigen, das wieder nicht trivial ist, weil es Initial- und Finaltopologien verbindet.

7.26 Lemma. *Sei $q: X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung und Z ein lokal kompakter Raum. Dann ist die Abbildung $q \times \text{id}_Z: X \times Z \rightarrow Y \times Z$ eine Quotientenabbildung.*

7.27 Bemerkung. Das Lemma ist nützlich, um mit Z parametrisierte stetige Familien von stetigen Funktion aus dem Quotientenraum Y in einen anderen Raum zu definieren. In Anwendungen ist der Raum Z häufig das Einheitsintervall.

Beweis. $q \times \text{id}_Z$ ist offenbar stetig und surjektiv. Sei $U \subset Y \times Z$ mit $\tilde{U} := (q \times \text{id}_Z)^{-1}[U]$ offen. Es ist zu zeigen, dass U offen ist.

Sei $(y, z) \in U$. Da q surjektiv ist, existiert $x \in X$ mit $q(x) = y$, also $(x, z) \in \tilde{U}$. Da \tilde{U} offen und Z lokal kompakt ist, existiert $K \in \mathcal{U}(z)$, K kompakt, mit $\{x\} \times K \subset \tilde{U}$, also auch $\{y\} \times K \subset U$. Wir setzen nun $\tilde{V} := \left\{ x' \in X : \{x'\} \times K \subset \tilde{U} \right\} = \{x' \in X : \{q(x')\} \times K \subset U\}$. Sei $x' \in \tilde{V}$. Dann existiert für beliebiges $k \in K$ eine Umgebung V_k von k , so dass $W_k := \left\{ x'' \in X : \{x''\} \times V_k \subset \tilde{U} \right\}$ Umgebung von x' ist. Aufgrund der Kompaktheit von K existieren nun $n \in \mathbb{N}$ und $k_1, \dots, k_n \in K$, so dass $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{k_i}$. Dann ist $\bigcap_{i=1}^n W_{k_i}$ Umgebung von x' und $(\bigcap_{i=1}^n W_{k_i}) \times K \subset \tilde{U}$, also $\bigcap_{i=1}^n W_{k_i} \subset \tilde{V}$. Das zeigt, dass \tilde{V} offen ist. Nun ist mit $V := \{y' \in Y : \{y'\} \times K \subset U\}$ gerade $\tilde{V} = q^{-1}[V]$, also ist V offen und $V \times K \subset U$ Umgebung von (y, z) . Damit ist U offen. \square

Abschnitt 8

Homotopien und Schleifen

Homotopie

Wir betrachten nun das Deformieren einer Abbildung in eine andere.

8.1 Definition. Seien X, Y topologische Räume und $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1 ist eine stetige Abbildung $F: X \times I \rightarrow Y$, so dass $F(x, 0) = f_0(x)$ und $F(x, 1) = f_1(x)$ für alle $x \in X$. Wir nennen f_0 und f_1 zu einander *homotop* und schreiben $f_0 \simeq f_1$, wenn eine Homotopie zwischen f_0 und f_1 existiert.

Für die Anschauung mag es manchmal sinnvoll sein, sich F als Abbildung vom Zylinder $X \times I$ vorzustellen, und manchmal, F als eine mit der Zeit $t \in I$ variierende Schar von Funktionen

$$\begin{aligned} f_t: X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto F(x, t) \end{aligned}$$

anzusehen.

8.2 Beispiel. Seien X, Y nicht-leere Räume und $f, g: X \rightarrow Y$ konstante Funktionen. Dann ist $f \simeq g$ genau dann, wenn die Bilder von f und g in der selben Wegzusammenhangskomponente von Y liegen.

8.3 Beispiel. Sei $n \geq 0$ und

$$\begin{aligned} r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Dann ist $r \simeq \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ wie die Homotopie

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ (x, t) &\mapsto \frac{x}{(1-t)\|x\| + t} \end{aligned}$$

zeigt.

8.4 Proposition. Seien X, Y Räume. Die Relation \simeq ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Funktionen von X nach Y .

Beweis. Es seien $f, g, h: X \rightarrow Y$ stetig.

Die stetige Funktion

$$\begin{aligned} X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

zeigt $f \simeq f$ und damit die Reflexivität von \simeq .

Ist $f \simeq g$ und F eine Homotopie zwischen f und g , so ist mit

$$\begin{aligned} r: I &\rightarrow I \\ t &\mapsto 1 - t \end{aligned}$$

$F \circ (\text{id}_X \times r)$ eine Homotopie zwischen g und f , also $g \simeq f$, was die Symmetrie von \simeq zeigt.

Ist $f \simeq g$ und $g \simeq h$ und mit zugehörigen Homotopien F und G , so ist

$$\begin{aligned} X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto \begin{cases} F(x, 2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x, 2t - 1), & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen f und h . Für die wohldefiniert beachte, dass $F(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$ und für die Stetigkeit, dass $X \times [0, \frac{1}{2}]$ und $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ in $X \times I$ abgeschlossen sind. Dies zeigt $f \simeq h$ und die Transitivität von \simeq . \square

Die Komposition von Abbildungen respektiert die Äquivalenzrelation Homotopie:

8.5 Proposition. Seien X, Y, Z Räume und $f, f': X \rightarrow Y$, $g, g': Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen. Ist $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$, so ist $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Beweis. Ist F eine Homotopie zwischen f und f' , so ist $g \circ f$ eine Homotopie zwischen $g \circ f$ und $g \circ f'$. G eine Homotopie zwischen g und g' , so ist $G \circ (f' \times \text{id}_I)$ eine Homotopie zwischen $g \circ f'$ und $g' \circ f'$. Es ist also $g \circ f \simeq g \circ f' \simeq g' \circ f'$. \square

Homotopie relativ zu einem Unterraum

8.6 Definition. Seien X, Y Räume, $A \subset X$ und $f, g: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Wir sagen, f sei *relativ zu A homotop* zu g , $f \simeq g \text{ rel } A$, wenn eine Homotopie $F: X \times I \rightarrow Y$ zwischen f und g existiert, so dass $F(a, t) = F(a, 0)$ für alle $a \in A, t \in I$.

Damit $f \simeq g \text{ rel } A$ gelten kann, muss natürlich $f|_A = g|_A$ erfüllt sein.

8.7 Beispiel. In Beispiel 8.3 ist $r \simeq \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \text{ rel } \mathbb{S}^{n-1}$.

8.8 Proposition. Seien X, Y Räume, $A \subset X$. Dann ist Homotopie relativ zu A eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Man wiederhole den Beweis, den wir oben für $A = \emptyset$ gegeben haben. \square

Ebenso verallgemeinern wir:

8.9 Proposition. Seien X, Y, Z Räume, $A \subset X$ und $f, f': X \rightarrow Y$, $g, g': Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen. Ist $f \simeq f' \text{ rel } A$ und $g \simeq g' \text{ rel } f[A]$, so ist $g \circ f \simeq g' \circ f' \text{ rel } A$. \square

Nützlich ist auch die folgende Tatsache.

8.10 Proposition. Seien X ein Raum, $A \subset X$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f, g: X \rightarrow Y$. Ist $f|_A = g|_A$ und Y konvex, so ist $f \simeq g \text{ rel } A$.

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned} H: X \times I &\rightarrow Y \\ (x, \lambda) &\mapsto (1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x). \end{aligned}$$

Es ist $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Außerdem ist $H(a, \lambda) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$, $\lambda \in I$. \square

8.11 Beispiel. Ist X ein Raum und sind $w, w': I \rightarrow X$ stetige Wege mit gleichem Anfangspunkt, also $w(0) = w'(0)$, so ist $w \simeq w' \text{ rel } \{0\}$: Ist $c_0: I \rightarrow I$ die Abbildung, die konstant 0 ist, so ist nämlich, da I konvex ist, $c_0 \simeq \text{id}_I \text{ rel } \{0\}$ und daher

$$\begin{aligned} w &= w \circ \text{id}_I \\ &\simeq w \circ c_0 \text{ rel } \{0\} \\ &= w' \circ c_0 \\ &\simeq w' \circ \text{id}_I \text{ rel } \{0\} \\ &= w'. \end{aligned}$$

Andererseits scheint auch offensichtlich, dass für

$$\begin{array}{ll} w: I \rightarrow \mathbb{S}^1, & w': I \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ s \mapsto (\cos s\pi, \sin s\pi) & s \mapsto (\cos s\pi, -\sin s\pi), \end{array}$$

also zwei Wege in von $(1, 0)$ nach $(-1, 0)$ in \mathbb{S}^1 , wobei einer oben, der andere unten entlang geht, gilt, dass

$$w \not\simeq w' \text{ rel } \{0, 1\},$$

dass es also nicht möglich ist, den einen Weg in den anderen zu überführen, wenn man beide Endpunkte festhält. Das ist auch in der Tat wahr, wir werden aber noch einiges an Vorbereitung benötigen, um das zu zeigen.

Wir definieren nun noch eine Klasse von Räumen, die aus der Sicht der Homotopietheorie trivial sind.

8.12 Definition. Sei X ein Raum. Wir sagen X sei *zusammenziehbar*, wenn $X \neq \emptyset$ und die Identitätsabbildung id_X homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

8.13 Beispiel. Nicht-leere konvexe Teilmengen von \mathbb{R}^n sind zusammenziehbar.

Beispiele von nicht zusammenziehbaren Räumen anzugeben, fällt uns schwerer. Die Sphären \mathbb{S}^n sind nicht zusammenziehbar, aber für $n > 0$ können wir das noch nicht zeigen. Immerhin haben wir:

8.14 Proposition. Sei X ein zusammenziehbarer Raum. Dann ist X wegzusammenhängend.

Beweis. Sei $H: X \times I \rightarrow X$ eine Homotopie, die zeigt, dass X zusammenziehbar ist, also $H(x, 0) = x$ für alle x und $H(x, 1) = x_1$ für alle x und ein $x_1 \in X$. Ist nun $x \in X$ beliebig, so ist $H(x, \bullet)$ ein Weg von x zu x_1 , also liegen x und x_1 in der selben Wegzusammenhangskomponente. Damit hat X genau eine Wegzusammenhangskomponente. \square

Wege

8.15 Definition. Seien X ein Raum und $w, w': I \rightarrow X$ Wege in X mit $w(1) = w'(0)$. Wie bei der Diskussion des Wegzusammenhangs bezeichnen wir mit w^- den Weg

$$\begin{aligned} w^-: I &\rightarrow X \\ t &\mapsto w(1-t) \end{aligned}$$

und mit $w * w'$ den Weg

$$\begin{aligned} w * w': I &\rightarrow X \\ t &\mapsto \begin{cases} w(2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ w'(2t-1), & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Außerdem bezeichnen wir für $x \in X$ mit c_x den konstanten Weg

$$\begin{aligned} c_x: I &\rightarrow X \\ t &\mapsto x, \end{aligned}$$

der in $\{x\}$ verläuft.

8.16 Proposition. Seien X, Y Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetig, $w, w': I \rightarrow X$ stetig mit $w(1) = w'(0)$. Dann ist $(f \circ w)(1) = (f \circ w')(0)$ und $(f \circ w) * (f \circ w') = f \circ (w * w')$. \square

8.17 Proposition. Sind $v, v', w, w': I \rightarrow X$ stetig mit $v(1) = w(0)$, und ist $v \simeq v' \text{ rel } \{0, 1\}$, $w \simeq w' \text{ rel } \{0, 1\}$, so ist $v * w \simeq v' * w' \text{ rel } \{0, 1\}$.

Beweis. Sei F die Homotopie zwischen v und v' , G die Homotopie zwischen w und w' . Dann ist

$$I \times I \rightarrow X$$

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} F(2s, t), & s \leq \frac{1}{2}, \\ G(2s - 1, t), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen $v * w$ und $v' * w'$, und diese Homotopie hält $\{0, 1\}$ (sogar $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$) fest. \square

8.18 Proposition. Sei X ein Raum, $w, w', w'': I \rightarrow X$ stetig, $w(1) = w'(0)$, $w'(1) = w''(0)$. Dann gilt:

$$(i) (w * w') * w'' \simeq w * (w' * w'') \text{ rel } \{0, 1\},$$

$$(ii) c_{w(0)} * w \simeq w \simeq w * c_{w(1)} \text{ rel } \{0, 1\},$$

$$(iii) w * w^- \simeq c_{w(0)} \text{ rel } \{0, 1\}.$$

Beweis. Zu (i): Man kann die Homotopie direkt angeben, und das sei zur Übung empfohlen. Wir gehen hier etwas anders vor: Wir definieren zunächst

$$f: [0, 3] \rightarrow X$$

$$s \mapsto \begin{cases} w(s), & 0 \leq s \leq 1, \\ w'(s - 1), & 1 \leq s \leq 2, \\ w''(s - 2), & 2 \leq s \leq 3, \end{cases}$$

f ist stetig, und für $a, b \in \mathbb{R}$,

$$l_{a,b}: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \mapsto s \cdot b + (1 - s) \cdot a.$$

Dann ist zum Beispiel $w' = f \circ l_{1,2}$, also $(w * w') * w'' = f \circ ((l_{0,1} * l_{1,2}) * l_{2,3})$ und $w * (w' * w'') = f \circ (l_{0,1} * (l_{1,2} * l_{2,3}))$. Wegen Proposition 8.9 genügt es nun, zu zeigen, dass

$$(l_{0,1} * l_{1,2}) * l_{2,3} \simeq l_{0,1} * (l_{1,2} * l_{2,3}) \text{ rel } \{0, 1\},$$

beide Seiten aufgefasst als Wege in $[0, 3]$. Da beide Wege Anfangspunkt 0 und Endpunkt 3 haben, folgt dies aber mit Proposition 8.10 aus der Konvexität von $[0, 3]$.

Zu (ii): Es ist $c_{w(0)} * w = w \circ (c_0 * \text{id}_I)$ und $w = w \circ \text{id}_I$. Nun sind $c_0 * \text{id}_I$ und id_I beides Wege in I mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt 1 und $c_{w(0)} * w \simeq w \text{ rel } \{0, 1\}$ folgt wie eben, und $w \simeq w * c_{w(1)} \text{ rel } \{0, 1\}$ ebenso.

Zu (iii): Wie eben mit $w * w^- = w \circ (l_{0,1} * l_{1,0})$, $c_{w(0)} = w \circ c_0$. \square

Die Fundamentalgruppe

Diese Untersuchungen machen die folgende Definition möglich.

8.19 Definition. Sei X ein Raum und $x_0 \in X$. Dann bezeichnen wir mit $\pi_1(X, x_0)$ die Menge der Äquivalenzklassen von stetigen Wegen $w: I \rightarrow X$ mit $w(0) = w(1) = x_0$ bezüglich Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$. Einen Weg w mit $w(0) = w(1) = x_0$ nennen wir einen *geschlossenen Weg bei x_0* oder eine *Schleife bei x_0* .

Auf $\pi_1(X, x_0)$ ist durch

$$[w] \cdot [w'] := [w * w']$$

eine Multiplikation erklärt, die $\pi_1(X, x_0)$ zu einer Gruppe mit neutralem Element $[c_{x_0}]$ macht. $\pi_1(X, x_0)$ heißt die *Fundamentalgruppe* von X mit *Basispunkt x_0* .

8.20 Definition. Ein *Raum mit Basispunkt* ist ein Paar (X, x_0) , wobei X ein Raum ist und $x_0 \in X$. Sind $(X, x_0), (Y, y_0)$ Räume mit Basispunkt, so heißt eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ *basispunkterhaltend*, wenn $f(x_0) = y_0$. Wir schreiben hierfür $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Sind $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ basispunkterhaltende Abbildungen, so werden wir unter einer Homotopie zwischen f und g , wenn wir nichts anderes bemerken, immer eine Homotopie relativ zu $\{x_0\}$ verstehen. Wollen wir explizit sagen, dass eine Homotopie nicht relativ zum Basispunkt zu sein braucht, so reden wir von einer *freien Homotopie*.

8.21 Definition und Proposition. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) Räume mit Basispunkt, $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ stetig. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \pi_1(f): \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [w] &\mapsto [f \circ w]. \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert und ein Homomorphismus von Gruppen. An Stelle von $\pi_1(f)$ schreiben wir auch $f_\#$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit folgt aus Proposition 8.9, die Verträglichkeit mit der Multiplikation aus Proposition 8.16. \square

8.22 Proposition. Seien (X, x_0) , (Y, y_0) , (Z, z_0) Räume mit Basispunkt, $f, f': (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ stetig. Dann gilt:

(i) Ist $f \simeq f'$ (relativ zu $\{x_0\}$), so ist $\pi_1(f) = \pi_1(f')$.

(ii) Es ist $\pi_1(\text{id}_{(X, x_0)}) = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

(iii) Es ist $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$.

Beweis. (i) folgt aus Proposition 8.9, (ii) und (iii) sind klar. \square

Die Fundamentalgruppe erlaubt es uns, topologische Situationen in algebraische zu übersetzen, wobei man dann hofft, dass letztere einfacher sind. Zum Beispiel hat man:

8.23 Proposition. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) Räume mit Basispunkt und $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ und $g: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ stetige Abbildungen. Gelten $g \circ f \simeq \text{id}_{(X, x_0)}$ und $f \circ g \simeq \text{id}_{(Y, y_0)}$, so ist $f_{\#}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus.

Beweis. Aus $g \circ f \simeq \text{id}_{(X, x_0)}$ folgt $g_{\#} \circ f_{\#} = (g \circ f)_{\#} = (\text{id}_{(X, x_0)})_{\#} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$. Aus $f \circ g \simeq \text{id}_{(Y, y_0)}$ folgt, dass $f_{\#} \circ g_{\#} = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$. Das heißt gerade, dass $f_{\#}$ ein Isomorphismus und invers zu $g_{\#}$ ist. \square

8.24 Beispiel. Sei $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ und $i: (\mathbb{S}^{n-1}, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0)$ die Inklusion. Wir haben in Beispiel 8.3 eine Abbildung $r: (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0) \rightarrow (\mathbb{S}^{n-1}, x_0)$ angegeben, so dass $r \circ i = \text{id}_{(\mathbb{S}^{n-1}, x_0)}$ und $i \circ r \simeq \text{id}_{(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0)}$, es ist also $i_{\#}: \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0)$ ein Isomorphismus mit inverser Abbildung $r_{\#}$.

In Proposition 8.23 müssen wir bei den Abbildungen und Homotopien die Basispunkte beachten, wir werden später sehen, dass sich das in diesem Fall umgehen lässt. Für den Spezialfall, dass Y ein einpunktiger Raum ist, tun wir das jetzt schon direkt.

8.25 Proposition. Sei X zusammenziehbar und $x_0 \in X$. Dann ist $\pi_1(X, x_0)$ eine triviale Gruppe.

Beweis. Sei w eine Schleife bei x_0 . Wir zeigen, dass $[w] = [c_{x_0}] = e$. Sei dazu H eine Homotopie von id_{x_0} zu einer konstanten Abbildung. Wir betrachten $G := H \circ (w \times \text{id}_I): I \times I \rightarrow X$. Setzen wir $p := H(x_0, \bullet)$, $x_1 := p(1)$, so ist $G(0, \bullet) = G(1, \bullet) = p$, $G(\bullet, 0) = w$, $G(\bullet, 1) = c_{x_1}$. Sind also $i, j: I \rightarrow I \times I$ die Wege

$$i(t) := (t, 0), \quad j(t) := \begin{cases} (0, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (4t - 2, 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ (1, 4 - 4t) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

so ist $G \circ i = w$ und $G \circ j = p * (c_{x_1} * p^-)$. Da $i(0) = (0, 0) = j(0)$, $i(1) = (1, 0) = j(1)$ und $I \times I$ konvex ist, ist $i \simeq j \text{ rel } \{0, 1\}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
 w &= G \circ i \\
 &\simeq G \circ j && \text{rel } \{0, 1\} \\
 &= p * (c_{x_1} * p^-) \\
 &\simeq p * p^- && \text{rel } \{0, 1\} \\
 &\simeq c_{x_0} && \text{rel } \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Bisher wissen wir nicht einmal, dass es einen Raum gibt, dessen Fundamentalgruppe nicht trivial ist, und ohne dieses Wissen kann diese Theorie nicht hilfreich sein. Unser nächstes Ziel wird daher sein, die Fundamentalgruppe von \mathbb{S}^1 zu bestimmen und zu zeigen, dass sie nicht trivial ist. Später werden wir dann noch Hilfsmittel kennenlernen, um die Fundamentalgruppen vieler Räume zu bestimmen.

Abschnitt 9

Die Fundamentalgruppe des Kreises

Überlagerungen und die Fundamentalgruppe von \mathbb{S}^1

Überlagerungen (die Definition folgt weiter unten) stehen in engem Zusammenhang mit der Fundamentalgruppe. Wenn wir auch keine Zeit haben werden, diesen Zusammenhang näher zu untersuchen, so wollen wir doch, auch wenn wir hauptsächlich einen einzigen Fall benötigen werden, die grundlegenden Eigenschaften allgemein beweisen. Wir beginnen damit, das für uns wesentliche Beispiel einzuführen.

Wenn wir die Theorie der Fundamentalgruppe gewinnbringend anwenden wollen, müssen wir die Fundamentalgruppe eines Raumes bestimmen, für den sie nicht trivial ist. Der grundlegende Fall ist die Kreislinie. Wir betrachten für $k \in \mathbb{Z}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} u_k: I &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ s &\mapsto (\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt). \end{aligned}$$

Das ist eine Schleife bei $(1, 0)$. Anschaulich wickelt diese das Einheitsintervall k -mal um die Kreislinie herum. Wir werden im folgenden zeigen, dass wir $u_k \simeq u_l \text{ rel } \{0, 1\}$ nur für $k = l$ haben und dass zu jeder Schleife w in \mathbb{S}^1 bei $(1, 0)$ ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $w \simeq u_k \text{ rel } \{0, 1\}$. Wir werden also zeigen, dass

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{Z} &\rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \\ k &\mapsto [u_k] \end{aligned}$$

eine Bijektion (und in der Tat ein Isomorphismus von Gruppen) ist. Dabei wird es sich als hilfreich erweisen, die Abbildung

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ r &\mapsto (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r) \end{aligned}$$

und die Wege

$$\begin{aligned} v_k: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto ks \end{aligned}$$

in \mathbb{R} mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt k zu betrachten. Es ist dann $u_k = p \circ v_k$. Die Abbildung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ist ein Beispiel einer Überlagerung.

9.1 Definition. Eine Abbildung $p: X \rightarrow Y$ heißt eine *Überlagerung*, wenn X und Y wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Hausdorffräume sind, p surjektiv ist und zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung U existiert, so dass für jede Wegkomponente V von $p^{-1}[U]$ die Einschränkung von p einen Homöomorphismus $V \rightarrow U$ ergibt. Mengen U dieser Art nennen wir *gleichmäßig überdeckt* oder *elementar*, die Wegkomponenten von $p^{-1}[U]$ die *Blätter* über U .

9.2 Proposition. Die oben beschriebene Abbildung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ist eine Überlagerung.

Beweis. Zunächst sind \mathbb{R} und \mathbb{S}^1 zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und hausdorffsch. Außerdem ist p surjektiv. Sei nun $x \in \mathbb{S}^1$ beliebig, etwa $x = p(r)$. Wir zeigen, dass $U := \mathbb{S}^1 \setminus \{x\}$ gleichmäßig überdeckt ist. U ist offen und $p^{-1}[U] = \mathbb{R} \setminus \{r + z : z \in \mathbb{Z}\}$. Die Wegkomponenten von $p^{-1}[U]$ sind also die offenen Intervalle $(r + z, r + z + 1)$ für $z \in \mathbb{Z}$. Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ ist die Einschränkung von p

$$\begin{aligned} (r + z, r + z + 1) &\rightarrow U \\ z &\mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus. Ist nun $y \in \mathbb{S}^1$ beliebig, so liegt y in der gleichmäßig überdeckten Menge $\mathbb{S}^1 \setminus \{-y\}$. \square

Ist Z ein Raum, $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung und $f: Z \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so können wir uns fragen, ob eine stetige *Hochhebung* von f , also eine Abbildung $\tilde{f}: Z \rightarrow X$ mit $p \circ \tilde{f} = f$, existiert. Das wird im allgemeinen von Z und f abhängen. Für Wege, also für $Z = I$, werden wir nun aber sehen, dass eine stetige Hochhebung immer existiert und zwar für jedes $x \in p^{-1}\{f(0)\}$ genau eine mit $\tilde{f}(0) = x$.

Ist der Weg so kurz, dass er ganz in einer gleichmäßig überdeckten Menge verläuft, so ist dies klar. Im allgemeinen werden wir den Weg in so kurze Stücke zerlegen, dass dies für diese gilt. Dies wird das Lebesgue-Lemma leisten, das wahrscheinlich aus der Analysis-Grundvorlesung bekannt ist. Wir erinnern kurz daran.

9.3 Lemma (Lebesgue). Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und \mathcal{C} eine offene Überdeckung von X . Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für jedes $x \in X$ ein $O \in \mathcal{C}$ existiert, so dass $B_\delta(x) \subset O$.

Beweis. Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $\varepsilon_x > 0$, so dass $B_{2\varepsilon_x}(x)$ in einem Element von \mathcal{C} liegt. Da $\{B_{\varepsilon_x}(x) : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X ist, existiert aufgrund der Kompaktheit von X ein $n \in \mathbb{N}$ und x_1, \dots, x_n , so dass $X = \bigcup_{k=1}^n B_{\varepsilon_{x_n}}(x_n)$. Setze $\delta := \min \{\varepsilon_{x_n} : 1 \leq k \leq n\}$. Ist nun $y \in X$ beliebig, so existiert ein k mit $y \in B_{\varepsilon_{x_k}}(x_k)$. Nun ist $B_\delta(y) \subset B_{2\varepsilon_{x_k}}$ und liegt damit ganz in einem Element von \mathcal{C} . \square

9.4 Proposition (Hochheben von Wegen). *Ist $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, $w: I \rightarrow Y$ stetig und $x_0 \in X$ mit $p(x_0) = w(0)$, dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{w}: I \rightarrow X$ mit $\tilde{w}(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{w} = w$.*

Beweis. Sei $\{U_j: j \in J\}$ eine offene Überdeckung von Y bestehend aus gleichmäßig überdeckten Mengen. Dann ist $\{w^{-1}[U_j]: j \in J\}$ eine offene Überdeckung von I . Nach dem Lebesgue-Lemma gibt es also ein $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass zu jedem k mit $0 < k \leq N$ ein $j \in J$ mit $w\left[\left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]\right] \subset U_j$ existiert. Für solches N werden wir für $0 \leq k \leq N$ induktiv zeigen, dass es genau ein stetiges $\tilde{w}_k: \left[0, \frac{k}{N}\right] \rightarrow X$ mit $\tilde{w}_k(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{w}_k = w|_{\left[0, \frac{k}{N}\right]}$ gibt. Der Fall $k = N$ zeigt dann die Behauptung. Wir setzen $I_k := \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]$.

$\tilde{w}_0(0) = x_0$ erledigt $k = 0$. Sei nun $0 < k \leq N$ und Existenz und Eindeutigkeit von \tilde{w}_{k-1} bereits gezeigt. Dann muss \tilde{w}_k , wenn es existiert, auf $\left[0, \frac{k-1}{N}\right]$ mit \tilde{w}_{k-1} übereinstimmen. Es bleibt also zu zeigen, dass es genau ein stetiges $f: I_k \rightarrow X$ mit $f\left(\frac{k-1}{N}\right) = \tilde{w}_{k-1}\left(\frac{k-1}{N}\right)$ und $p \circ f = w|_{I_k}$ gibt. \tilde{w}_k erhält man dann durch Zusammensetzen von \tilde{w}_{k-1} und f . Nun gibt es ein $j \in J$ mit $w[I_k] \subset U_j$. Es ist $p\left(\tilde{w}_{k-1}\left(\frac{k-1}{N}\right)\right) = w\left(\frac{k-1}{N}\right) \in U_j$. Sei V die Wegkomponente von $p^{-1}[U_j]$, in der $\tilde{w}_{k-1}\left(\frac{k-1}{N}\right)$ liegt. Jede stetige Abbildung f mit den geforderten Eigenschaften muss nun, da I_k wegzusammenhängend ist, ihr Bild in V haben. Da die Einschränkung von p einen Homöomorphismus $V \rightarrow U_j$ liefert, gibt es genau ein solches f , nämlich die Komposition von $w|_{I_k}$ mit dem Inversen dieses Homöomorphismus. \square

9.5 Korollar. *Die Abbildung Φ ist surjektiv.*

Beweis. Sei $\alpha \in \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$, $\alpha = [w]$. Wir betrachten die oben beschriebene Überlagerung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$. w lässt sich zu einem Weg in \mathbb{R} mit Anfangspunkt 0 hochheben, das heißt es gibt einen stetigen Weg $\tilde{w}: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $w(0) = 0$ und $p \circ \tilde{w} = w$. Aus $p(\tilde{w}(1)) = w(1) = (1, 0)$ folgt, dass $w(1) \in \mathbb{Z}$, sagen wir $w(1) = k$. Nun ist aber \mathbb{R} konvex, also ist $\tilde{w} \simeq v_k \text{ rel } \{0, 1\}$. Damit ist $\alpha = [w] = [p \circ \tilde{w}] = [p \circ v_k] = [u_k] = \Phi(k)$. \square

Als nächstes wollen wir zeigen, dass Hochhebungen homotoper Wege mit gleichem Anfangspunkt homotop sind.

9.6 Proposition (Hochheben von Homotopien). *Sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung und $F: I \times I \rightarrow Y$ stetig. Ist $\tilde{f}: I \rightarrow X$ stetig mit $p \circ \tilde{f} = F(\bullet, 0)$, so existiert eindeutig eine stetige Abbildung $\tilde{F}: I \times I \rightarrow X$ mit $\tilde{F}(\bullet, 0) = \tilde{f}$ und $p \circ \tilde{F} = F$.*

Beweis. Existiert ein solches \tilde{F} , so ist für jedes $s \in I$ die Einschränkung $\tilde{F}(s, \bullet)$ eine Hochhebung des Weges $F(s, \bullet)$ zu einem Weg mit Anfangspunkt $\tilde{f}(s)$. Aus der Eindeutigkeit von Hochhebungen von Wegen folgt also schon die Eindeutigkeit von \tilde{F} . Außerdem definiert dies \tilde{F} bereits, so dass wir nur noch die Stetigkeit nachzuprüfen haben.

Aus dem Lebesgue-Lemma folgt wieder die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$, so dass $F \left[\left[\frac{l}{N}, \frac{l+1}{N} \right] \times \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right] \right]$ für alle $0 \leq k, l < N$ in einer gleichmäßig überdeckten Menge enthalten ist. Es genügt, zu zeigen, dass für alle $0 \leq k, l < N$ die Einschränkung von \tilde{F} auf $\left[\frac{l}{N}, \frac{l+1}{N} \right] \times \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right]$ stetig ist, da $I \times I$ die Vereinigung dieser endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist. Wir tun dies für festes l per Induktion über k . Zur Abkürzung setzen wir $B := \left[\frac{l}{N}, \frac{l+1}{N} \right]$ und $I_k := \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right]$.

Sei also $0 \leq k < N$ und \tilde{F} für alle $k' < k$ auf $B \times I_{k'}$ stetig. Dann ist \tilde{F} zumindest auf $B \times \left\{ \frac{k}{N} \right\}$ stetig. (Für $k = 0$ folgt das aus der Stetigkeit von \tilde{f} .) Sei U eine gleichmäßig überdeckte Menge, die $F[B \times I_k]$ enthält. Da $B \times \left\{ \frac{k}{N} \right\}$ wegzusammenhängend ist, folgt nun aus der Stetigkeit von \tilde{F} auf dieser Menge, dass $\tilde{F} \left[B \times \left\{ \frac{k}{N} \right\} \right]$ ganz in einer Wegkomponente V von $p^{-1}[U]$ liegt. Da ja die Einschränkung von p einen Homöomorphismus von V auf U ergibt, existiert eine stetige Abbildung $G: B \times I_k \rightarrow V$ mit $p \circ G = F|_{B \times I_k}$ und $G|_{B \times \left\{ \frac{k}{N} \right\}} = \tilde{F}|_{B \times \left\{ \frac{k}{N} \right\}}$. Für jedes $r \in B$ sind $G|_{\{r\} \times I_k}$ und $\tilde{F}|_{\{r\} \times I_k}$ Hochhebungen von $F|_{\{r\} \times I_k}$ mit $G \left(r, \frac{k}{N} \right) = \tilde{F} \left(r, \frac{k}{N} \right)$. Aus der Eindeutigkeit von Hochhebungen von Wegen bei vorgegebenem Anfangspunkt folgt, dass \tilde{F} auf $B \times I_k$ mit G übereinstimmt und daher dort stetig ist. \square

9.7 Korollar. Sei $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, $v, w: I \rightarrow Y$ stetig. Ist $v \simeq w \text{ rel } \{0, 1\}$ und sind $\tilde{v}, \tilde{w}: I \rightarrow X$ stetige Hochhebungen mit gleichem Anfangspunkt, also $v = p \circ \tilde{v}$, $w = p \circ \tilde{w}$, $\tilde{v}(0) = \tilde{w}(0)$, so ist $\tilde{v} \simeq \tilde{w} \text{ rel } \{0, 1\}$, also insbesondere $\tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$.

Beweis. Sei F eine Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$ zwischen v und w . Dann existiert nach dem eben gezeigten eine stetige Abbildung $\tilde{F}: I \times I \rightarrow X$ mit $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{v}(s)$ für alle $s \in I$. Da $\tilde{F}(0, \bullet)$ eine stetige Hochhebung des konstanten Weges $F(0, \bullet)$ ist, konstante Wege aber sicher eine konstante Hochhebung besitzen, folgt aus der Eindeutigkeit der Hochhebung eines Weges bei gegebenem Anfangspunkt, dass $\tilde{F}(0, t) = \tilde{v}(0)$ für alle $t \in I$ und ebenso $\tilde{F}(1, t) = \tilde{v}(1)$. Nun sind $\tilde{F}(\bullet, 1)$ und \tilde{w} beides stetige Hochhebungen von $F(\bullet, 1) = w$ und $\tilde{F}(0, 1) = \tilde{v}(1) = \tilde{w}(1)$, also $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{w}(s)$ für alle $s \in I$. Wir haben gezeigt, dass \tilde{F} eine Homotopie zwischen \tilde{v} und \tilde{w} relativ zu $\{0, 1\}$ ist. \square

9.8 Korollar. Die Abbildung Φ ist injektiv.

Beweis. Seien $k, l \in \mathbb{Z}$, $\Phi(k) = \Phi(l)$, also $[u_k] = [u_l]$. v_k und v_l sind Hochhebungen von u_k beziehungsweise u_l und $v_k(0) = 0 = v_l(0)$. Aus $[u_k] = [u_l]$ folgt nun $k = v_k(1) = v_l(1) = l$. \square

9.9 Korollar. \mathbb{S}^1 ist nicht zusammenziehbar.

Beweis. Zusammenziehbare Räume haben triviale Fundamentalgruppen, aber $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ ist nicht trivial. \square

9.10 Proposition. *Die Abbildung $\Phi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass Φ eine Bijektion ist, müssen also nur noch zeigen, dass Φ ein Homomorphismus ist. Seien $k, l \in \mathbb{Z}$. v_k ist eine Hochhebung von u_k mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt k . Nun ist

$$\begin{aligned} w: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto k + ls \end{aligned}$$

eine Hochhebung von u_l mit Anfangspunkt k und Endpunkt $k+l$. Wir können also $v_k * w$ bilden, und da \mathbb{R} konvex und dies ein Weg mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt $k+l$ ist, gilt $v_k * w \simeq v_{k+l} \text{ rel } \{0, 1\}$. Es folgt $\Phi(k)\Phi(l) = [u_k][u_l] = [u_k * u_l] = [(p \circ v_l) * (p \circ w)] = [p \circ (v_l * w)] = [p \circ v_{k+l}] = [u_{k+l}] = \Phi(k+l)$. \square

Dies ermöglicht nun schon einige Anwendungen.

Der Brouwersche Fixpunktsatz

Bisher haben wir nur die Fundamentalgruppen des Punktes und der Kreislinie und damit auch aller Räume, die zu einem dieser homotopieäquivalent sind, berechnet. Das genügt aber schon für die folgende Proposition.

9.11 Proposition. *Es gibt keine stetige Retraktion von der Kreisscheibe auf die Kreislinie, das heißt keine stetige Abbildung $r: D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ mit $r|_{\mathbb{S}^1} = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$.*

Beweis (erste Fassung). Der Raum D^2 ist zusammenziehbar. In einer Aufgabe haben wir gesehen, dass Retrakte zusammenziehbarer Räume zusammenziehbar sind, nach Korollar 9.9 ist aber \mathbb{S}^1 nicht zusammenziehbar. \square

Weil diese Methoden so wichtig sind, wollen wir es uns nicht nehmen lassen, den Beweis ein zweites Mal zu formulieren, und zwar so, dass die Fundamentalgruppen nicht versteckt werden.

Beweis (zweite Fassung). Sei $p \in \mathbb{S}^1$ ein Punkt, $i: (\mathbb{S}^1, p) \rightarrow (D^2, p)$ die Inklusion, und $r: (D^2, p) \rightarrow (\mathbb{S}^1, p)$ stetig. Wir nehmen an, dass $r \circ i = \text{id}$, dass also das Diagramm von Räumen mit Basispunkt

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{S}^1, p) & \xrightarrow{i} & (D^2, p) \\ & \searrow \text{id}_{(\mathbb{S}^1, p)} & \downarrow r \\ & & (\mathbb{S}^1, p) \end{array}$$

kommutiert. Wegen Proposition 8.22 erhalten wir daraus das kommutative Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}^1, p) & \xrightarrow{i_{\#}} & \pi_1(D^2, p) \\ & \searrow \text{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1, p)} & \downarrow r_{\#} \\ & & \pi_1(\mathbb{S}^1, p). \end{array}$$

Da D^2 zusammenziehbar ist, ist $\pi_1(D^2, p)$ trivial. Damit ist auch die Komposition $r_{\#} \circ i_{\#} = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1, p)}$ trivial. Dies ist ein Widerspruch zu $\pi_1(\mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z}$. \square

Dies ist auch für Abbildungen $D^{m+1} \rightarrow \mathbb{S}^m$ wahr. Der Fall $m = 0$ ist gerade der Zwischenwertsatz, der Fall $m > 1$ liegt nicht im Bereich der Methoden, die wir im Moment zur Verfügung haben.

Als direkte Folgerung haben wir:

9.12 Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz in Dimension 2). *Jede stetige Abbildung $f: D^2 \rightarrow D^2$ hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $f: D^2 \rightarrow D^2$ stetig und fixpunktfrei. Wir zeigen, dass die Existenz einer stetigen Retraktion $r: D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ folgt, was der vorhergehenden Proposition widerspricht.

Die folgende Konstruktion ist an dieser Stelle die übliche, da man dazu eine gute Zeichnung anfertigen kann. Man tue dies und merke sich diese Konstruktion. Sei $x \in D^2$. Da $f(x) \neq x$ existiert ein eindeutig bestimmter von $f(x)$ ausgehender Strahl, der durch x geht. Man definiere $r(x)$ als den Schnittpunkt dieses Strahls mit \mathbb{S}^1 . Offenbar ist für $x \in \mathbb{S}^1$ dann $r(x) = x$. Leider ist es etwas lästig, die Stetigkeit von r nachzurechnen.

Wir geben daher noch eine weitere Konstruktion an. Dazu definieren wir zunächst

$$g: D^2 \rightarrow D^2$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}f(2x), & \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ (1 - \|x\|)f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \|x\| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

g ist stetig und auch fixpunktfrei: Für $\|x\| \leq \frac{1}{2}$ folgt aus $g(x) = x$, dass $f(2x) = 2x$, und für $\|x\| > \frac{1}{2}$ ist $\|g(x)\| < \frac{1}{2}$. g hat aber die zusätzliche Eigenschaft, dass $g(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^1$. Daher ist die stetige Abbildung

$$r: D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$x \mapsto \frac{x - g(x)}{\|x - g(x)\|}$$

eine Retraktion. \square

Abbildungsgrad und der Hauptsatz der Algebra

Im folgenden identifizieren wir \mathbb{S}^1 mit der Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1.

9.13 Definition. Sei $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ eine stetige Abbildung. Wir definieren den *Grad von f* , $\deg f \in \mathbb{Z}$ wie folgt. Sei

$$\begin{aligned} \bar{f}: (\mathbb{S}^1, 1) &\rightarrow (\mathbb{S}^1, 1), \\ z &\mapsto f(z)/f(1) \end{aligned}$$

und Φ der Isomorphismus aus Proposition 9.10. Dann sei $\deg f$ die ganze Zahl, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}^1, p) & \xrightarrow{\bar{f}_\#} & \pi_1(\mathbb{S}^1, p) \\ \cong \uparrow \Phi & & \cong \uparrow \Phi \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot \deg f} & \mathbb{Z} \end{array}$$

kommutativ macht.

9.14 Bemerkung. Wir haben in der Definition benutzt, dass jeder Homomorphismus von \mathbb{Z} nach \mathbb{Z} die Multiplikation mit einer eindeutig bestimmten ganzen Zahl ist.

9.15 Proposition. Sind $f, g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ Abbildungen und $f \simeq g$, so ist $\deg f = \deg g$.

Beweis. Sei $H: \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$ eine Homotopie von f nach g . Wir betrachten $\bar{H}: \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\bar{H}(z, t) := H(z, t)/H(1, t)$. Dann ist $\bar{H}(z, 0) = f(z)/f(1) = \bar{f}(z)$, $\bar{H}(z, 1) = g(z)/g(1) = \bar{g}(z)$, und $\bar{H}(1, t) = 1$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$, $t \in I$. Also ist $\bar{f} \simeq \bar{g}: (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$ und damit $\bar{f}_\# = \bar{g}_\#$, also $\deg f = \deg g$. \square

9.16 Proposition. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ist der Grad der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\mapsto az^k \end{aligned}$$

gleich k .

Beweis. Sei f die Abbildung $f(z) = az^k$. Dann ist $\bar{f}(z) = f(z)/f(1) = z^k$. Sei $l \in \mathbb{Z}$. Der Weg u_l , der in der Definition von Φ vorkam, war gerade durch $u_l(r) = \exp(2\pi i \cdot lr)$ gegeben, auch wenn wir es dort anders formuliert haben. Dann ist $\bar{f}(u_l(r)) = \exp(2\pi i \cdot lr)^k = \exp(2\pi i \cdot klr) = u_{kl}(r)$, also $\bar{f}_\#(\Phi(l)) = \bar{f}_\#([u_l]) = [\bar{f} \circ u_l] = [u_{kl}] = \Phi(kl)$, also, da l beliebig war ($l = 1$ hätte natürlich genügt), $\deg f = k$. \square

9.17 Korollar (Hauptsatz der Algebra). Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein komplexes Polynom vom Grad n , also $a_n \neq 0$. Hat p keine Nullstelle, so ist $n = 0$.

Beweis. Die Idee ist die folgende: Da p keine Nullstelle hat, ist für jede nicht-negative reelle Zahl r die Abbildung

$$f_r: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$z \mapsto \frac{p(rz)}{|p(rz)|}$$

definiert, die das Verhalten von p auf dem Kreis mit Radius r wiedergibt. Nun ist $f_0(z) = \frac{a_0}{|a_0|} z^0$, aber für $r \rightarrow \infty$ geht die Abbildung f_r gegen $f_\infty(z) = \frac{a_n}{|a_n|} z^n$. Das zeigt, dass $f_0 \simeq f_\infty$ und damit $n = \deg f_\infty = \deg f_0 = 0$. Die Sache mit dem Grenzübergang muss man natürlich genauer machen, und das werden wir nun tun.

Zunächst definieren wir

$$F: \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$(z, r) \mapsto f_r(z).$$

F ist stetig und damit $f_0 \simeq f_1$. Weiter definieren wir für $r \in \mathbb{R}$

$$g_r: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \qquad G: \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$z \mapsto \frac{\sum_{k=0}^n a_k r^{n-k} z^k}{|\sum_{k=0}^n a_k r^{n-k} z^k|}, \qquad (z, r) \mapsto g_r(z).$$

Für $r > 0$ ist der Nenner von $g_r(z)$ gleich $r^n |p(\frac{z}{r})| \neq 0$. (Also, nach Kürzen, $g_r = f_{1/r}$, was die Verbindung zum einleitenden Absatz schafft.) Es ist $g_0(z) = \frac{a_n z^n}{|a_n z^n|} = \frac{a_n}{|a_n|} z^n$. Damit ist g_r tatsächlich für alle $r \in \mathbb{R}$ definiert, und da G stetig ist, ist $g_0 \simeq g_1$. Da aber $g_1 = f_1$, folgt $g_0 \simeq f_0$. Nun ist wie angekündigt $f_0(z) = \frac{a_0}{|a_0|} = \frac{a_0}{|a_0|} z^0$, $g_0(z) = \frac{a_n}{|a_n|} z^n$ und damit $n = \deg g_0 = \deg f_0 = 0$. \square

9.18 Bemerkung. Man kann diesen Beweis auch für reelle Polynome durchführen. Man erhält dann Abbildungen $f_r: \mathbb{S}^0 \rightarrow \mathbb{S}^0$ und dass die Abbildung $\mathbb{S}^0 \rightarrow \mathbb{S}^0$, $x \mapsto \frac{a_n}{|a_n|} x^n$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Da $\text{id}_{\mathbb{S}^0}$ nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist (Zwischenwertsatz!), folgt, dass n gerade (also nicht unbedingt 0, aber kongruent 0 modulo 2) ist. Das ist wohl in etwa die komplizierteste Art, zu zeigen, dass ein reelles Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle hat.

Abschnitt 10

Mehr Fundamentalgruppe

Weitere Eigenschaften der Fundamentalgruppe

Der Einfluss des Basispunktes

Da I (der Urbildraum von Wegen) und $I \times I$ (der Urbildraum von Homotopien von Wegen) wegzusammenhängend sind, ‚sieht‘ $\pi_1(X, x_0)$ nur die Wegkomponente von X , in der x_0 liegt. Liegen allerdings x_0 und x_1 in der selben Wegkomponente, so werden wir nun sehen, dass $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph sind.

10.1 Definition. Sei X ein Raum und $p: I \rightarrow X$ stetig, $p(0) = x_0, p(1) = x_1$. Dann definieren wir

$$h_p: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [w] \mapsto [p * w * p^{-1}].$$

Die Wohldefiniertheit folgt aus Proposition 8.17 (und Proposition 8.18).

10.2 Proposition. Sei X ein Raum, $p, p', q: I \rightarrow X$ stetig, $p(1) = q(0), x_0 \in X$. Dann gilt:

- (i) h_p ist ein Homomorphismus.
- (ii) Ist $p \simeq p'$ rel $\{0, 1\}$, so ist $h_p = h_{p'}$.
- (iii) Es ist $h_{c_{x_0}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.
- (iv) Es ist $h_{p * q} = h_p \circ h_q$.
- (v) Ist p eine Schleife bei x_0 und $\gamma := [p] \in \pi_1(X, x_0)$, so ist $h_p: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ der innere Automorphismus $h_p(\alpha) = \gamma \alpha \gamma^{-1}$.

Beweis. Das sind alles einfache Folgerungen aus Proposition 8.18. □

10.3 Proposition. Sei X ein Raum, $x_0, x_1 \in X$. Liegen x_0, x_1 in der selben Wegkomponente von X , so ist $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$, denn für jeden stetigen Weg $p: I \rightarrow X$ mit $p(0) = x_0, p(1) = x_1$ ist

$$h_p: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

ein Isomorphismus. Sind p, q zwei solche Wege, so ist $q * p^-$ eine Schleife bei x_0 und mit $\alpha := [q * p^-] \in \pi_1(X, x_0)$ ist

$$h_q(\beta) = \alpha h_p(\beta) \alpha^{-1} \quad \text{für alle } \beta \in \pi_1(X, x_0),$$

h_p und h_q unterscheiden sich also um einen inneren Automorphismus von $\pi_1(X, x_0)$.

Beweis. Ist p ein stetiger Weg von x_0 nach x_1 , so ist $h_p \circ h_{p^-} = h_{p * p^-} = h_{c_{x_0}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ und ebenso $h_{p^-} \circ h_p = \text{id}_{\pi_1(X, x_1)}$. Damit ist h_p ein Isomorphismus.

Ist q ein weiterer stetiger Weg von x_0 nach x_1 , so ist $h_q = h_{q * p^- * p} = h_{q * p^-} \circ h_p$. \square

Ist X wegzusammenhängend und $\pi_1(X, x_0)$ abelsch, so hängt h_p nicht von p ab und wir können $\pi_1(X)$ als unabhängig vom Basispunkt betrachten. So ist es im Nachhinein auch nicht verwunderlich, dass wir bei der Diskussion des Grades einer Abbildung $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ nicht verlangen mussten, dass Abbildungen oder Homotopien (siehe auch Proposition 10.8) den Basispunkt erhalten. Im allgemeinen ist mehr Vorsicht nötig.

Homotopieäquivalenz

Homotopie von Abbildungen führt uns zu einer Äquivalenzrelation auf Räumen, die schwächer als Homöomorphie ist. Eine Variante dieses Konzepts für punktierte Räume ist uns bereits in Proposition 8.23 begegnet.

10.4 Definition. Seien X, Y Räume. Eine *Homotopieäquivalenz* zwischen X und Y ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, so dass eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y$$

existiert. In dieser Situation nennen wir g *homotopieinvers* zu f . Wir sagen, X und Y seien *homotopieäquivalent*, und schreiben $X \simeq Y$, wenn zwischen ihnen eine Homotopieäquivalenz existiert.

10.5 Proposition. *Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Seien X, Y, Z Räume. $\text{id}_X: X \rightarrow X$ zeigt $X \simeq X$ und damit die Reflexivität. Symmetrie ergibt sich sofort aus der Definition. Seien nun $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Homotopieäquivalenzen mit Homotopieinversen f' und g' . Dann ist

$$(f' \circ g') \circ (g \circ f) = f' \circ (g' \circ g) \circ f \simeq f' \circ \text{id}_Y \circ f = f' \circ f \simeq \text{id}_X$$

und ebenso

$$(g \circ f) \circ (f' \circ g') \simeq \text{id}_Z,$$

also $g \circ f: X \rightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz. Das zeigt die Transitivität. \square

10.6 Beispiel. Sei $i: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Inklusionsabbildung. Wir haben in Beispiel 8.3 eine Abbildung $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ angegeben, die homotopieinvers zu i ist. Es ist also $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

Eine einfache Umformulierung ist:

10.7 Proposition. Sei X ein Raum. Dann ist X genau dann zusammenziehbar, X homotopieäquivalent zu einem einpunktigen Raum ist. \square

Freie Homotopie und die Fundamentalgruppe

Wir werden nun untersuchen, was man über die von homotopen Abbildungen induzierten Homomorphismen sagen kann, wenn die Homotopien den Basispunkt bewegen dürfen.

10.8 Proposition. Seien X, Y Räume, $x_0 \in X$, $f, g: X \rightarrow Y$ stetig und $f \simeq g$. Ist $H: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g , $H(\bullet, 0) = f$, $H(\bullet, 1) = g$, und $p: I \rightarrow Y$ der Weg $H(x_0, \bullet)$ in Y , $y_0 := p(0)$, $y_1 := p(1)$, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{g\#} & \pi_1(Y, y_1) \\ & \searrow f\# & \downarrow \cong h_p \\ & & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

kommutativ. Ist insbesondere eine der beiden Abbildungen $f\#, g\#$ ein Isomorphismus, so auch die andere.

Beweis. Sei w eine Schleife bei x_0 .

Wie im Beweis von Proposition 8.25 betrachten wir die Wege $i, j: I \rightarrow I \times I$,

$$i(t) := (t, 0), \quad j(t) := \begin{cases} (0, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (4t - 2, 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ (1, 4 - 4t) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

wobei $i \simeq j \text{ rel } \{0, 1\}$. Es ist

$$f \circ w = H \circ (w \times \text{id}_I) \circ i, \quad p * ((g \circ w) * p^-) = H \circ (w \times \text{id}_I) \circ j,$$

also

$$f\#([w]) = [f \circ w] = [p * (g \circ w) * p^-] = h_p([g \circ w]) = (h_p \circ g\#)([w]),$$

wie behauptet. \square

Wir können nun eine stärkere Form von Proposition 8.23 beweisen. Der Spezialfall $X = \{x_0\}$ ist Proposition 8.25.

10.9 Proposition. *Seien X, Y Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist für $x_0 \in X$ die Abbildung*

$$f_{\#}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $g: Y \rightarrow X$ eine Homotopieinverse. Wir betrachten

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_{\#}} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_{\#}} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_{\#}} \pi_1(Y, f(g(f(x_0))))$$

wobei die erste und dritte Abbildung natürlich verschieden sind, obwohl sie gleich bezeichnet sind. Da $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $(\text{id}_X)_{\#}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ ein Isomorphismus, nämlich die Identität, ist, ist nach der vorherigen Proposition auch $(g \circ f)_{\#}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, (g \circ f)(x_0))$ ein Isomorphismus. Also ist die Komposition der ersten beiden Abbildungen unseres Diagrammes ein Isomorphismus. Ebenso folgt aus $f \circ g \simeq \text{id}_Y$, dass die Komposition der letzten beiden Abbildungen ein Isomorphismus ist. Damit ist die mittlere Abbildung sowohl ein Epimorphismus als auch ein Monomorphismus, also ein Isomorphismus. Daher müssen auch die anderen beiden Abbildungen Isomorphismen sein, insbesondere die erste. \square

Der Satz von Seifert und van Kampen

Ein erster Schritt

Wir wollen die Fundamentalgruppen von mehr Räumen bestimmen können. Eine Methode dazu ist, den Raum in Teile zu zerlegen, deren Fundamentalgruppen wir bereits kennen. Ein erster Schritt ist der folgende.

10.10 Proposition (Satz von Seifert und van Kampen, einfache Hälfte).

Sei X ein Raum und $U_0, U_1 \subset X$ offene Teilmengen, $x_0 \in U_0 \cap U_1$ und $i^k: U_k \rightarrow X$ die Inklusionsabbildungen. Ist $X = U_0 \cup U_1$ und ist $U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend, so wird die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ von den Elementen von $i_{\#}^0[\pi_1(U_0, x_0)] \cup i_{\#}^1[\pi_1(U_1, x_0)]$ erzeugt.

Beweis. Sei $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ repräsentiert durch den geschlossenen Weg w . Da $\{U_0, U_1\}$ eine offene Überdeckung von X ist, liefert uns das Lebesgue-Lemma ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle k mit $0 \leq k < N$ ein r_k mit $w[[k/N, (k+1)/N]] \subset U_{r_k}$ existiert. Es ist bereits $w(0) = w(1) = x_0$, und wir zeigen nun, dass wir es immer so einrichten können, dass $w(k/N) = x_0$ für alle k mit $0 \leq k \leq N$. Dazu wählen wir zu jedem k mit $0 < k < N$ einen Weg v_k von $w(k/N)$ nach x_0 . Da $U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend ist, können wir es so einrichten, dass v_k in $U_{r_{k-1}} \cap U_{r_k}$ verläuft. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir außerdem $v_0 = v_N = c_{x_0}$. Nun ersetzen wir w durch einen Weg w' , indem wir für $0 \leq k < N$ am Anfang des Stücks $w|_{[k/N, (k+1)/N]}$ den Weg v_k^- und

am Ende den Weg v_{k+1} einsetzen. Wir machen das an dieser Stelle exakt und werden uns später mit solchen verbalen Beschreibungen begnügen:

$$w' : I \rightarrow X$$

$$s \mapsto \begin{cases} v_k^- \left(3N \left(s - \frac{k}{N} \right) \right), & \frac{k}{N} \leq s \leq \frac{3k+1}{3N}, \\ w \left(\frac{k}{N} + 3 \left(s - \frac{3k+1}{3N} \right) \right), & \frac{3k+1}{3N} \leq s \leq \frac{3k+2}{3N}, \\ v_{k+1} \left(3N \left(s - \frac{3k+2}{3N} \right) \right), & \frac{3k+2}{3N} \leq s \leq \frac{k+1}{N}. \end{cases}$$

Da wir an den Enden konstante Wege und an den Stellen k/N für $0 < k < N$ die Wege $v_k * v_k^-$, die relativ zu $\{0, 1\}$ homotop zu konstanten Wegen sind, eingefügt haben, ist $[w'] = [w] = \gamma$. Aufgrund der Wahl der v_k ist auch $w' \llbracket [k/N, (k+1)/N] \rrbracket \subset U_{r_k}$. Da nun $w'(k/N) = x_0$ für alle k , repräsentiert $w' \llbracket [k/N, (k+1)/N] \rrbracket$ ein $\alpha_k \in \pi_1(U_{r_k})$, $0 \leq k < N$. Damit ist $\gamma = i_{\#}^{r_0}(\alpha_0) i_{\#}^{r_1}(\alpha_1) \cdots i_{\#}^{r_{N-1}}(\alpha_{N-1})$. \square

10.11 Definition. Ein Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er nicht-leer und wegzusammenhängend ist und für ein $x_0 \in X$ (und damit für alle) die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ trivial ist.

10.12 Korollar. Seien X ein Raum und $U_0, U_1 \subset X$ offene, einfach zusammenhängende Teilmengen, so dass $X = U_0 \cup U_1$ ist und $U_0 \cap U_1$ nicht-leer und wegzusammenhängend ist. Dann ist X einfach zusammenhängend. \square

10.13 Korollar. Für $n \geq 2$ ist \mathbb{S}^n einfach zusammenhängend.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{S}^n$ der Nordpol und $-x \in \mathbb{S}^n$ der Südpol. Wir setzen $U_0 := \mathbb{S}^n \setminus \{x\}$, $U_1 := \mathbb{S}^n \setminus \{-x\}$. Es sind $U_0, U_1 \approx \mathbb{R}^n$, also zusammenziehbar und damit einfach zusammenhängend. Außerdem ist $U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend (hier benutzen wir $n > 1$). Das vorherige Korollar liefert nun die Behauptung. \square

10.14 Korollar. $\mathbb{S}^2 \not\cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Beweis. \mathbb{S}^2 ist einfach zusammenhängend. Wäre $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, so müsste nach Proposition 10.9 auch $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ einfach zusammenhängend sein. Nach Proposition 9.10 und Aufgabe 59 ist aber $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. \square

$\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$, erster Teil

Betrachten wir nun das Beispiel des Raumes, der wie die Ziffer 8 aussieht. Diesen erhält man durch Verheften von zwei Kreisen an einem Punkt.

10.15 Definition. Seien $(X_0, x_0), (X_1, x_1)$ Räume mit Basispunkt, $j^0 : X_0 \rightarrow X_0 + X_1$ und $j^1 : X_1 \rightarrow X_0 + X_1$ die kanonischen Inklusionen. Dann definieren wir einen Raum

$$X_0 \vee X_1 := (X_0 + X_1) / \{j^0(x_0), j^1(x_1)\}.$$

Ist $q: X_0 + X_1 \rightarrow (X_0 + X_1)/\{j^0(x_0), j^1(x_1)\}$ die Quotientenabbildung, so definieren wir außerdem die Einbettungen $i^0 := q \circ j^0$, $i^1 := q \circ j^1$. Als Basispunkt von $X_0 \vee X_1$ wählen wir den Punkt $i^0(x_0) = i^1(x_1)$.

Wir betrachten $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ und die Einbettungen $i^0, i^1: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Da die Bilder der Einbettungen nicht offen sind, können wir Proposition 10.10 nicht direkt anwenden. Es gibt für $k \in \{0, 1\}$ aber eine offene Menge $U_k \subset \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ mit $\text{im } i^k \subset U_k$ so dass die Inklusionsabbildung $\text{im } i^k \rightarrow U_k$ eine Homotopieäquivalenz ist. Beispielsweise kann man als U_k das Komplement eines Punktes, der nicht in $\text{im } i^k$ liegt, wählen. Man hat also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & U_0 & \xleftarrow{\cong} \mathbb{S}^1 \\
 & \downarrow j^0 & \swarrow i^0 \\
 U_1 & \xrightarrow{j^1} & \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \\
 \uparrow \cong & \nearrow i^1 & \\
 \mathbb{S}^1 & &
 \end{array}$$

mit den Inklusionsabbildungen $j^k: U_k \rightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Dies liefert, da alle Abbildungen Basispunkte erhalten, ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(U_0, x_0) & \xleftarrow{\cong} & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \\
 \downarrow j^0_{\#} & \swarrow i^0_{\#} & \\
 \pi_1(U_1, x_0) & \xrightarrow{j^1_{\#}} & \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0) \\
 \uparrow \cong & \nearrow i^1_{\#} & \\
 \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) & &
 \end{array}$$

Nach Proposition 10.10 angewandt auf j^0 und j^1 ist also $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ von $\text{im } i^0_{\#} \cup \text{im } i^1_{\#}$ erzeugt. Ist nun g ein Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{S}^1)$, so ist $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ von $\alpha := i^0_{\#}(g)$ und $\beta := i^1_{\#}(g)$ erzeugt.

Damit haben wir selbstverständlich $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ noch nicht vollständig bestimmt. Wir können sehen, dass $i^k_{\#}$ injektiv ist, denn bilden wir das Bild von i^{1-k} auf den Basispunkt ab, so gibt es Abbildungen

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{i^k} \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

deren Komposition die Identität ist, also ist auch die Komposition

$$\pi(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{i^k_{\#}} \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1),$$

gleich der Identität, und die erste Abbildung muss injektiv sein. Da $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ ist also $\alpha^r \neq e$, $\beta^r \neq e$ für $r \neq 0$.

Was wir noch nicht wissen, ist, wann Produkte, die α und β enthalten das neutrale Element ergeben. Ist beispielsweise $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ kommutativ, also $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = e$? Allgemeiner: Gibt es *Relationen* zwischen α und β ? Um diese Frage präziser stellen zu können, betrachten wir zunächst einige algebraische Konstrukte.

Freie Produkte

10.16 Definition und Proposition. Seien J eine Menge und G_j , $j \in J$ Gruppen. Dann existiert eine Gruppe $\coprod_{j \in J} G_j$ zusammen mit Gruppenhomomorphismen $i_j: G_j \rightarrow \coprod_{j \in J} G_j$, so dass jedes Element aus $\coprod_{j \in J} G_j$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$i_{j_1}(g_1)i_{j_2}(g_2)\cdots i_{j_s}(g_s)$$

mit $s \in \mathbb{N}$ und $j_k \in J$, $g_k \in G_{j_k}$, $g_k \neq e$, $j_k \neq j_{k+1}$ für alle k (10.1)

hat, wobei wir den Fall $s = 0$ als Darstellung des neutralen Elements auffassen. Die Gruppe $\coprod_{j \in J} G_j$ heißt das *freie Produkt* (auch Koproduct) der G_j . Für $\coprod_{j \in \{0, \dots, n\}} G_j$ schreiben wir auch $G_0 * G_1 * \cdots * G_n$.

Beweisskizze. Wir betrachten endliche Folgen von Paaren (j, g) mit $j \in J$ und $g \in G_j$ in der Absicht, dass die Folge $(j_1, g_1) \cdots (j_s, g_s)$ später das Element $i_{j_1}(g_1) \cdots i_{j_s}(g_s)$ darstellen soll. Eine solche Folge nennen wir ein *Wort*. Für Wörter dieser Art führen wir zwei Arten von Reduktionsschritten ein, die die Länge des Wortes um 1 verkürzen. Die erste Art ist das Weglassen eines Vorkommens von (j, e) (wobei $e \in G_j$ das neutrale Element bezeichne), die zweite das Ersetzen von $(j, g)(j, g')$ durch (j, gg') . Worte, die keinen Reduktionsschritt zulassen, sind die, die Bedingungen wie in (10.1) erfüllen. Eine Folge von Reduktionsschritten nennen wir maximal, wenn sie in einem Wort endet, das keinen weiteren Reduktionsschritt zulässt. Offensichtlich gibt es zu jedem Wort eine in ihm startende maximale Folge von Reduktionsschritten.

Das wesentliche technische Lemma, das sich durch Induktion beweisen lässt, ist nun, dass zu einem gegebenen Wort jede in ihm startende maximale Folge von Reduktionsschritten in der selben Folge endet. Das Wort, in der sie endet, können wir daher die Reduktion des Wortes, in der sie startet, nennen. Wir nennen nun zwei Worte äquivalent, wenn sie die gleiche Reduktion haben. Auf der Menge der Äquivalenzklassen definieren wir eine Multiplikation durch Hintereinanderschreiben von Repräsentanten. Es ist nun leicht zu sehen, dass diese Multiplikation wohldefiniert ist und eine Gruppe mit der Klasse des leeren Wortes als neutralem Element definiert. Zusammen mit den durch $i_j(g) := [(j, g)]$ definierten Abbildungen i_j erfüllt diese Gruppe die Bedingung an ein freies Produkt. \square

10.17 Proposition (Universelle Eigenschaft des freien Produkts). *Seien J eine Menge und G_j , $j \in J$ Gruppen. Es seien H eine weitere Gruppe*

und $h_j: G_j \rightarrow H$ Gruppenhomomorphismen. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $h: \coprod_{j \in J} G_j \rightarrow H$ mit $h_j = h \circ i_j$ für alle $j \in J$.

Beweisskizze. Die Abbildung h muss

$$h(i_{j_1}(g_1)i_{j_2}(g_2) \cdots i_{j_s}(g_s)) = h_{j_1}(g_1)h_{j_2}(g_2) \cdots h_{j_s}(g_s)$$

erfüllen, dies zeigt bereits die Eindeutigkeit. Ebenso ist eine diese Gleichung (für linke Seiten, die nicht die Bedingungen aus (10.1) erfüllen müssen) erfüllende Abbildung offenbar ein Homomorphismus. Es genügt daher, zu zeigen, dass eine durch diese Gleichung definierte Abbildung wohldefiniert ist. Da jeder Ausdruck wie im Argument der linken Seite der Gleichung sich durch mehrere Schritte, die aus dem Ersetzen von einem $i_j(g)i_j(g')$ durch $i_j(gg')$ oder dem Weglassen eines $i_j(e)$ bestehen, sich auf eine eindeutige Darstellung wie in (10.1) bringen lässt, folgt dies aus $h_j(g)h_j(g') = h_j(gg')$ und $h_j(e) = e$, angewandt auf die rechte Seite der Gleichung. \square

Aus der universellen Eigenschaft des freien Produkts folgt also die Existenz eines Gruppenhomomorphismus $h: \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) * \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) & \\
 & \downarrow i_0 & \\
 \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) & \xrightarrow{i_1} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) * \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) & \xrightarrow{i_{\#}^0} \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0) \\
 & \searrow & \uparrow h \\
 & & \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0) \\
 & \xrightarrow{i_{\#}^1} &
 \end{array}$$

(das zu viele i s enthält) kommutativ macht. Aus Proposition 10.10 und obiger Diskussion folgt, dass diese Abbildung surjektiv ist. Mit der Notation aus dieser Diskussion ist $\alpha = i_{\#}^0(g) = h(i_0(g))$ und $\beta = i_{\#}^1(g) = h(i_1(g))$. Unsere Frage nach Relationen zwischen α und β lässt sich nun wie folgt exakt formulieren: Was ist der Kern des Homomorphismus h ? Wir werden in Beispiel 10.23 sehen, dass der Kern in diesem Fall trivial ist, es also keine Relation zwischen α und β gibt. Wir werden also sehen, dass h ein Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ist.

Push-Out-Diagramme

Wir haben gesehen, dass wir in der Situation von Proposition 10.10 einen Epimorphismus $h: \pi_1(U_0, x_0) * \pi_1(U_1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ erhalten. Können wir erwarten, dass er immer ein Isomorphismus ist? Sicher nicht, wie man an dem Beispiel $U_0 = U_1 = X$ sieht. Allgemeiner bemerken wir, dass das

kommutative Diagramm von Räumen und Inklusionsabbildungen

$$\begin{array}{ccc} (U_0 \cap U_1, x_0) & \xrightarrow{j^0} & (U_0, x_0) \\ j^1 \downarrow & & \downarrow i^0 \\ (U_1, x_0) & \xrightarrow{i^1} & (X, x_0) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) & \xrightarrow{j_{\#}^0} & \pi_1(U_0, x_0) \\ j_{\#}^1 \downarrow & & \downarrow i_{\#}^0 \\ \pi_1(U_1, x_0) & \xrightarrow{i_{\#}^1} & \pi_1(X, x_0). \end{array}$$

von Gruppen und Homomorphismen liefert. Dies führt zu folgendem.

10.18 Lemma. *Es sei*

$$\begin{array}{ccccc} & & H_0 & & \\ & & \downarrow i_0 & \searrow h_0 & \\ H_1 & \xrightarrow{i_1} & H_0 * H_1 & \xrightarrow{h} & K \\ & \searrow h_1 & & & \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen, wobei i_0 und i_1 die kanonischen Inklusionen bezeichnen. Außerdem seien eine Gruppe G und Homomorphismen $g_k: G \rightarrow H_k$ gegeben. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ g_1 \downarrow & & \downarrow h_0 \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & K \end{array} \tag{10.2}$$

genau dann, wenn

$$\{i_0(g_0(\alpha))i_1(g_1(\alpha))^{-1} : \alpha \in G\} \subset \ker h.$$

Beweis. Sei $\alpha \in G$. Dann ist $(h_k \circ g_k)(\alpha) = h(i_k(g_k(\alpha)))$ für $k \in \{0, 1\}$, also ist $(h_0 \circ g_0)(\alpha) = (h_1 \circ g_1)(\alpha)$ genau dann, wenn $h(i_0(g_0(\alpha))) = h(i_1(g_1(\alpha)))$, wenn also $i_0(g_0(\alpha))i_1(g_1(\alpha))^{-1} \in \ker h$. \square

Unter allen kommutativen Diagrammen (10.2) mit vorgegebenen g_0 und g_1 sind daher die ausgezeichnet, bei denen die sich ergebende Abbildung h surjektiv und mit minimalen Kern ist.

10.19 Definition. Es sei

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ \downarrow g_1 & & \downarrow h_0 \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & K \end{array}$$

ein Diagramm von Gruppen und Homomorphismen. Dieses Diagramm heißt ein *Push-Out-Diagramm*, wenn die durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} & & H_0 & & \\ & & \downarrow i_0 & \searrow h_0 & \\ H_1 & \xrightarrow{i_1} & H_0 * H_1 & \xrightarrow{h} & K \\ & \searrow h_1 & & \nearrow h & \end{array}$$

definierte Abbildung h surjektiv ist und ihr Kern der kleinste Normalteiler von $H_0 * H_1$ ist, der die Menge

$$\{i_0(g_0(\alpha))i_1(g_1(\alpha))^{-1} : \alpha \in G\}$$

enthält.

10.20 Bemerkung. Insbesondere ist ein Push-Out-Diagramm also kommutativ. Außerdem ist K durch die anderen Daten bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, denn h induziert einen Isomorphismus $(H_0 * H_1)/N \cong K$, wobei N der kleinste Normalteiler ist, der $\{i_0(g_0(\alpha))i_1(g_1(\alpha))^{-1} : \alpha \in G\}$ enthält.

Die Formulierung des Satzes

10.21 Satz (Seifert und van Kampen). *Sei X ein Raum und $U_0, U_1 \subset X$ offene Teilmengen, $x_0 \in U_0 \cap U_1$. Ist $X = U_0 \cup U_1$ und ist $U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend, so ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) & \xrightarrow{j_{\#}^0} & \pi_1(U_0, x_0) \\ \downarrow j_{\#}^1 & & \downarrow i_{\#}^0 \\ \pi_1(U_1, x_0) & \xrightarrow{i_{\#}^1} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

ein Push-Out Diagramm. Hierbei seien i^0, i^1, j^0, j^1 die Inklusionsabbildungen zwischen den verschiedenen Räumen.

Den Beweis des Satzes schieben wir noch auf, wir weisen aber schon darauf hin, dass die Surjektivität der Abbildung h in der Definition des Push-Outs direkt aus Proposition 10.10 folgt und der Kern von h aufgrund der Kommutativität des Diagramms den geforderten Normalteiler enthält. Es wird also noch zu zeigen sein, dass er nicht mehr enthält.

10.22 Korollar. Sei X ein Raum und $U_0, U_1 \subset X$ offene Teilmengen, $x_0 \in U_0 \cap U_1$. Ist $X = U_0 \cup U_1$ und ist $U_0 \cap U_1$ einfach zusammenhängend, so ist die Abbildung h in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(U_0, x_0) & \\
 & \downarrow i_0 & \searrow i_{\#}^0 \\
 \pi_1(U_1, x_0) & \xrightarrow{i_1} \pi_1(U_0, x_0) * \pi_1(U_1, x_0) & \\
 & \searrow i_{\#}^1 & \swarrow h \\
 & & \pi_1(X, x_0)
 \end{array}$$

\cong

ein Isomorphismus. Hierbei seien i^0, i^1 Inklusionsabbildungen von Räumen und i_0, i_1 die kanonischen Abbildungen aus der Definition des freien Produkts.

Beweis. In diesem Fall ist $\{i_0(j_{\#}^0(\alpha))i_1(j_{\#}^1(\alpha))^{-1} : \alpha \in \pi_1(U_0 \cap U_1, x_0)\} = \{e\}$. □

10.23 Beispiel. In unserem Beispiel der Teilmengen $U_0, U_1 \subset \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ ist $U_0 \cap U_1$ zusammenziehbar, also insbesondere einfach zusammenhängend. Der bereits früher betrachtete Homomorphismus $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ ist also ein Isomorphismus.

Abschnitt 11

Anwendungen und Beweis des Satzes von Seifert und van Kampen

Die Fundamentalgruppen der Torusknoten

Unter einem *Knoten* versteht man eine in den dreidimensionalen Raum eingebettete Kreislinie. Aus technischen Gründen ziehen wir es vor, mit der Ein-Punkt-Kompaktifizierung von \mathbb{R}^3 zu arbeiten. Wir definieren also einen Knoten K als einen Unterraum $K \subset \mathbb{S}^3$ mit $K \approx \mathbb{S}^1$.

Wir wollen zwei Knoten $K_0, K_1 \subset \mathbb{S}^3$ *äquivalent* nennen, wenn es einen Homöomorphismus $h: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ mit $h[K_0] = K_1$ gibt. Von dem Homöomorphismus h könnten wir weiterhin fordern, dass er orientierungserhaltend ist, was in diesem Fall bedeutet, dass $h \simeq_{\text{id}_{\mathbb{S}^3}}$. Das, und andere Details, wird für uns aber nicht von Interesse sein.

Auch wenn das der Anschauung widerspräche, ist es nicht ganz einfach, auszuschließen, dass alle Knoten äquivalent sind. Unser Ziel wird es sein, von zwei speziellen Knoten, nämlich dem Unknoten und der Kleeblattschlinge, zu zeigen, dass sie nicht äquivalent sind. Dazu werden wir ihre Komplemente betrachten. Sind K_0 und K_1 äquivalent, so ist $\mathbb{S}^3 \setminus K_0 \approx \mathbb{S}^3 \setminus K_1$. Wir werden von den Komplementen der genannten Knoten zeigen, dass ihre Fundamentalgruppen nicht isomorph sind, damit können die Komplemente auch nicht homöomorph sein.

Wir erinnern uns aus Aufgabe 3 und Aufgabe 53 daran, dass wir die 3-Sphäre erhalten können, indem wir zwei Volltori geeignet an ihren Rändern verheften. Es gibt Teilmengen $X, Y \subset \mathbb{S}^3$ mit $X \cup Y = \mathbb{S}^3$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\text{Inkl.}} & \mathbb{S}^1 \times D^2 & & \\
 \text{Inkl.} \downarrow & \searrow \approx & & \searrow i^X & \\
 D^2 \times \mathbb{S}^1 & & X \cap Y & \xrightarrow{\text{Inkl.}} & X \\
 & \searrow i^Y & \downarrow \text{Inkl.} & & \\
 & & Y & &
 \end{array}$$

Nehmen wir nun an, wir hätten einen Knoten, der auf diesem so eingebetteten Torus liegt, $K \subset X \cap Y \subset \mathbb{S}^3$. Wir würden gerne den Satz von Seifert und van Kampen mit der Zerlegung $\mathbb{S}^3 \setminus K = (X \setminus K) \cup (Y \setminus K)$ anwenden, was wir aber nicht direkt können, da dies keine Zerlegung in offene Teilmengen ist. Wir wählen daher wieder offene Umgebungen dieser Mengen,

$$U_X := (X \setminus K) \cup i^Y [\{(1 - \lambda)x, y) : (x, y) \in (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \setminus \bar{K}, 0 \leq \lambda < \varepsilon\}],$$

$$U_Y := (Y \setminus K) \cup i^X [\{(x, (1 - \lambda)y) : (x, y) \in (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \setminus \bar{K}, 0 \leq \lambda < \varepsilon\}],$$

für $0 < \varepsilon \leq 1$ und mit $\bar{K} = (i^X)^{-1}[K] \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Die Homotopie

$$U_X \times I \rightarrow U_X$$

$$(i^X(p), t) \mapsto i^X(p)$$

$$(i^Y((1 - \lambda)x, y), t) \mapsto ((1 - \lambda t)x, y)$$

zeigt, dass die Inklusionsabbildung $X \setminus K \rightarrow U_X$ eine Homotopieäquivalenz ist. Ebenso ist $Y \setminus K \rightarrow U_Y$ eine Homotopieäquivalenz, und ähnlich ergibt sich, dass die Inklusion $X \cap Y \setminus K \rightarrow U_X \cap U_Y$ eine Homotopieäquivalenz ist. Für $x_0 \in (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \setminus \bar{K}$ und $x_1 = i^X(x_0)$ erhalten wir daher folgendes kommutatives Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1((\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \setminus \bar{K}, x_0) & \longrightarrow & \pi_1((\mathbb{S}^1 \times D^2) \setminus \bar{K}, x_0) & & \\ \downarrow & \searrow \cong & & \searrow \cong & \\ \pi_1((D^2 \times \mathbb{S}^1) \setminus \bar{K}, x_0) & & \pi_1(U_X \cap U_Y, x_1) & \longrightarrow & \pi_1(U_X, x_1) \\ & \searrow \cong & \downarrow & & \downarrow \\ & & \pi_1(U_Y, x_1) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K, x_1). \end{array}$$

Wir nehmen nun weiterhin an, dass $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \setminus \bar{K}$ und damit $U_X \cap U_Y$ wegzusammenhängend ist. Dann ist nach dem Satz von Seifert und van Kampen das rechte untere Viereck ein Push-Out-Diagramm und daher auch das Diagramm bestehend aus den drei Gruppen links oben und $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K, x_1)$.

Nun können wir aber ohne weitere Informationen schon $\pi_1((\mathbb{S}^1 \times D^2) \setminus \bar{K}, x_0)$ und $\pi_1((D^2 \times \mathbb{S}^1) \setminus \bar{K}, x_0)$ bestimmen. Die Homotopie

$$((\mathbb{S}^1 \times D^2) \setminus \bar{K}) \times I \rightarrow (\mathbb{S}^1 \times D^2) \setminus \bar{K}$$

$$((x, y), t) \mapsto (x, ty)$$

zeigt, dass die Projektion $(\mathbb{S}^1 \times D^2) \setminus \bar{K} \rightarrow \mathbb{S}^1, (x, y) \mapsto x$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinverser $x \mapsto (x, 0)$ ist. Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}^1 \\ & \nearrow p_1 & \uparrow \simeq p_1 \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \setminus \bar{K} & \xrightarrow{\text{Inkl.}} & \mathbb{S}^1 \times D^2 \setminus \bar{K} \end{array}$$

kommutiert und auch das entsprechende Diagramm mit $D^2 \times \mathbb{S}^1$ haben wir schließlich ein Push-Out-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1((\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \setminus \bar{K}, x_0) & \xrightarrow{(p_1)\#} & \pi_1(\mathbb{S}^1, p_1(x_0)) \\ \downarrow (p_2)\# & & \downarrow \\ \pi_1(\mathbb{S}^1, p_2(x_0)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K, x_1). \end{array}$$

Die nicht bezeichneten Pfeile können mit Hilfe von Proposition 10.8 beschrieben werden.

Damit können wir nun tatsächlich die Fundamentalgruppen der Komplemente einiger Knoten berechnen. Seien $m, n \geq 1$ teilerfremde natürliche Zahlen. Es sei $\bar{K}_{m,n} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ das Bild der Einbettung

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \\ z &\mapsto (z^m, z^n) \end{aligned}$$

und $K_{m,n} = i^X[\bar{K}_{m,n}]$.

Der Knoten $K_{1,1}$ ist der triviale Knoten, es ist $\mathbb{S}^3 \setminus K_{1,1} \simeq \mathbb{S}^1$ und daher $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{1,1}) \cong \mathbb{Z}$. Die Fundamentalgruppe werden wir gleich noch auf anderem Wege erhalten.

Den Knoten $K_{2,3}$ nennen wir die Kleeblattschlinge.

Es ist $\mathbb{S}^1 \setminus \bar{K}_{m,n} \simeq \mathbb{S}^1$, eine Homotopieäquivalenz ist die Einbettung

$$\begin{aligned} j_{m,n}: \mathbb{S}^1 &\rightarrow (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \setminus \bar{K}_{m,n}, \\ z &\mapsto (\exp(\pi i/n)z^m, z^n). \end{aligned}$$

Da $\deg(p_1 \circ j_{m,n}) = m$, $\deg(p_2 \circ j_{m,n}) = n$, haben wir ein Push-Out-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot m} & \mathbb{Z} \\ \downarrow \cdot n & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{m,n}). \end{array}$$

Nach unserer Definition eines Push-Out-Diagramms heißt das, dass es, wenn wir $\alpha, \beta \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, $\alpha = i_0(1)$, $\beta = i_1(1)$ setzen, einen Epimorphismus $h: \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{m,n})$ gibt, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der $\alpha^m \beta^{-n}$ enthält. Wir sagen auch: $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{m,n})$ ist durch die Erzeuger α und β (hier genauer: $h(\alpha)$ und $h(\beta)$) und die Relation $\alpha^m \beta^{-n}$ (zu lesen als: $h(\alpha^m \beta^{-n}) = e$ bzw. $h(\alpha)^m = h(\beta)^n$ oder weniger genau „in $\pi(\mathbb{S}^3 \setminus K_{m,n})$ ist $\alpha^m = \beta^n$ “) gegeben. Dies nennen wir eine *Präsentation* der Gruppe $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{m,n})$.

Schauen wir nun, wie wir aus dieser Präsentation der Gruppe $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{m,n})$ mehr über sie erfahren. Beginnen wir mit dem Fall $m = 1$. Hier haben wir $h(\alpha) = h(\beta)^n$, das heißt $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{1,n})$ ist bereits von $h(\beta)$ erzeugt. Da keine

weiteren Relationen gelten, muss $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{1,n}) \cong \mathbb{Z}$ gelten. Formulieren wir dieses Argument mit unseren Definitionen exakt: Aufgrund der universellen Eigenschaft des freien Produkts gibt es einen Homomorphismus $\tilde{h}: \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $\tilde{h}(\beta) = 1$, $\tilde{h}(\alpha) = n$. Dieser macht das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z} * \mathbb{Z} & \xrightarrow[\beta \mapsto 1]{\alpha \mapsto n} & \mathbb{Z} \\
 \searrow \tilde{h} & & \downarrow g \quad k \mapsto h(\beta)^k \\
 & & \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{1,n}) \\
 \searrow h & &
 \end{array}$$

kommutativ, denn es ist ja $h(\alpha) = h(\beta)^n$. Der Homomorphismus g ist surjektiv, da h surjektiv ist. Der Kern von h ist der kleinste Normalteiler, der $\alpha\beta^{-n}$ enthält. Nun ist aber $\tilde{h}(\alpha\beta^{-n}) = n - n = 0$, also $\alpha\beta^{-n} \in \ker \tilde{h}$ und damit $\ker h \subset \ker \tilde{h}$. Daher ist g injektiv, also ein Isomorphismus.

Wenden wir uns nun der Kleeblattschlinge $K_{2,3}$ zu. In diesem Fall lässt sich die Gruppe nicht mehr einfacher als durch unsere Präsentation, die wir auch

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3}) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2\beta^{-3} \rangle$$

schreiben, darstellen. Wir wollen nun zeigen, dass diese Gruppe nicht abelsch ist. Dafür betrachten wir $S(3)$, die symmetrische Gruppe auf 3 Elementen und in ihr die Elemente (in Zykelschreibweise) $\tau = (1\ 2)$, $\sigma = (1\ 2\ 3)$. Es ist $\tau^2 = e = \sigma^3$ und $\tau\sigma \neq \sigma\tau$. Dies bedeutet, dass die Relation $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ nicht aus der Relation $\alpha^2\beta^{-3}$ folgt. Anders: Ist $\tilde{h}: \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \rightarrow S(3)$ der Homomorphismus $\tilde{h}(\alpha) = \tau$, $\tilde{h}(\beta) = \sigma$, so ist $\alpha^2\beta^{-3} \in \ker \tilde{h}$, aber $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \notin \ker \tilde{h}$, also ist $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ nicht in dem kleinsten Normalteiler enthalten, der $\alpha^2\beta^{-3}$ enthält. Da nun $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ nicht in dem Kern der Abbildung $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3})$ enthalten ist, ist $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3})$ nicht abelsch.

Wir haben also gezeigt, dass $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{2,3}) \not\cong \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_{1,1})$ und daher die Kleeblattschlinge nicht äquivalent zum trivialen Knoten ist.

Der Effekt des Anheftens von Zellen auf die Fundamentalgruppe

Das Anheften einer Zelle

Sei X ein Raum, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann können wir den Raum

$$Y := X \cup_f D^n$$

betrachten. Wir sagen in dieser Situation, Y gehe aus X durch Ankleben einer n -Zelle hervor. Wir wollen nun mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen untersuchen, wie sich die Fundamentalgruppe von Y aus der von X ergibt.

Mit der Notation aus 7.23 haben wir eine Einbettung $j: X \rightarrow Y$ und die charakteristische Abbildung $\chi: D^n \rightarrow Y$. Wir bemerken:

11.1 Proposition. $\chi|_{D^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}}$ ist eine offene Einbettung. Ist $A \subset D^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ und A abgeschlossen in D^n , so ist $\chi[A]$ abgeschlossen.

Beweis. Y trägt die Finaltopologie bezüglich j und χ . Nach Konstruktion von Y ist außerdem $\chi|_{D^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}}$ injektiv. Ist nun $O \subset D^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$, so ist $j^{-1}[\chi[O]] = \emptyset$ und $\chi^{-1}[\chi[O]] = O$. Ist also O offen, so auch $\chi[O]$. Das zeigt, dass $\chi|_{D^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}}$ eine offene Einbettung ist.

Ist $A \subset D^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$, so ist $j^{-1}[Y \setminus \chi[A]] = X$ und $\chi^{-1}[Y \setminus \chi[A]] = D^n \setminus A$. Ist also A in D^n abgeschlossen, so ist auch $\chi[A]$ abgeschlossen. \square

Um den Satz von Seifert und van Kampen anwenden zu können, setzen wir nun

$$\begin{aligned} U_0 &:= Y \setminus \{\chi(0)\}, \\ U_1 &:= \chi[D^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}]. \end{aligned}$$

Wir können U_0 mit $X \cup_f (D^n \setminus \{0\})$ identifizieren. Wenn wir annehmen, dass X wegzusammenhängend ist, erfüllen U_0 und U_1 für $n \geq 2$ die Voraussetzungen des Satzes von Seifert und van Kampen. Das einzige, das hierbei vielleicht nicht sofort ersichtlich ist, ist, dass U_0 wegzusammenhängend ist. Das folgt aber daraus, dass $U_0 \simeq X$:

11.2 Proposition. Sei $n \geq 1$ und $r: U_0 \rightarrow X$ die Abbildung, die durch die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\text{Inkl.}} & D^n \setminus \{0\} \\ \downarrow f & & \downarrow \chi \\ X & \xrightarrow{j} & U_0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow x \mapsto f(x/\|x\|) \\ \searrow r \\ \downarrow \chi \\ X \end{array}$$

id

gegeben ist (siehe Proposition 7.25). Dann ist $r \circ j = \text{id}_X$ und $j \circ r \simeq \text{id}_{U_0}$, wobei die Homotopie $H: U_0 \times I \rightarrow U_0$ durch $H(\bullet, t) = h_t$ und die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\text{Inkl.}} & D^n \setminus \{0\} & & \\ \downarrow f & & \downarrow \chi & \nearrow x \mapsto (t + \frac{1-t}{\|x\|})x & \\ X & \xrightarrow{j} & U_0 & & D^n \setminus \{0\} \\ & \searrow \text{id} & \downarrow h_t & \downarrow \chi & \\ & & X & \xrightarrow{j} & U_0 \end{array}$$

gegeben ist.

Beweis. Das einzige Problem ist die Stetigkeit von H . Es bezeichne $q: X + (D^n \setminus \{0\}) \rightarrow U_0$ die Quotientenabbildung. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X \times I + (D^n \setminus \{0\}) \times I & & \\
 \downarrow \cong & \searrow \tilde{H} & \\
 (X + (D^n \setminus \{0\})) \times I & & \\
 \downarrow q \times \text{id}_I & & \\
 U_0 \times I & \xrightarrow{H} & U_0.
 \end{array}$$

Die Abbildung links oben sei die offensichtliche; dass sie ein Homöomorphismus ist, rechne man zur Übung nach. \tilde{H} sei durch die Kommutativität des Diagramms gegeben und ist stetig, denn die Restriktion auf $X \times I$ ist die Projektion auf X gefolgt von j , und die Restriktion auf $(D^n \setminus \{0\}) \times I$ ist die Komposition

$$(D^n \setminus \{0\}) \times I \xrightarrow{(x,t) \mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|x\|}\right)x} (D^n \setminus \{0\}) \times I \xrightarrow{x} U_0.$$

Die Stetigkeit von H folgt also daraus, dass $q \times \text{id}_I$ nach Lemma 7.26 eine Quotientenabbildung ist. \square

Der Effekt auf die Fundamentalgruppe

Wir nehmen nun an, dass $n \geq 2$, so dass $U_0 \cap U_1 \approx D^n \setminus \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ wegzusammenhängend ist. Da $U_1 \approx D^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ zusammenziehbar, also insbesondere einfach zusammenhängend, ist, haben wir es mit einem einfacheren Spezialfall des Satzes von Seifert und van Kampen zu tun, denn das Push-Out-Diagramm ist von der folgenden Form.

11.3 Lemma. Ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{g} & H \\
 \downarrow & & \downarrow h \\
 \{e\} & \longrightarrow & K
 \end{array}$$

ist genau dann ein Push-Out-Diagramm, wenn h surjektiv ist und der Kern von h der kleinste Normalteiler ist, der das Bild von g enthält.

Beweis. Wir haben den Homomorphismus h' zu betrachten, der

$$\begin{array}{ccc}
 H & & \\
 \searrow i_0 & \searrow h & \\
 & H * \{e\} & \xrightarrow{h'} K
 \end{array}$$

kommutativ macht, sowie den kleinsten Normalteiler N von $H * \{e\}$, der $N \supset \{i_0(g(\alpha)) : \alpha \in G\} = \text{im}(i_0 \circ g)$ enthält. Das Diagramm ist genau dann ein Push-Out-Diagramm, wenn $\ker h' = N$. Die Behauptung folgt nun daraus, dass i_0 ein Isomorphismus ist. \square

In unserem Fall ist also in der Sequenz von von Inklusionen induzierten Homomorphismen

$$\pi_1(U_0 \cap U_1) \rightarrow \pi_1(U_0) \rightarrow \pi_1(Y)$$

der zweite Homomorphismus surjektiv und sein Kern der kleinste Normalteiler, der das Bild des ersten enthält. Wir können auch die ersten beiden Gruppen identifizieren: Es ist $U_0 \cap U_1 \approx D^n \setminus (\mathbb{S}^{n-1} \cup \{0\}) \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ und wie bereits gezeigt $U_0 \simeq X$, also $\pi_1(U_0 \cap U_1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{n-1})$ und $\pi_1(U_0) \cong \pi_1(X)$. Um daraus wirklich $\pi_1(Y)$ bestimmen zu können, müssen wir aber auch die Homomorphismen besser beschreiben.

Dazu legen wir zunächst Basispunkte fest. Wir schreiben $1 = (1, 0, \dots, 0)$ für den Basispunkt von \mathbb{S}^{n-1} und setzen $x_0 := f(1) \in X$, $y_0 := j(x_0) \in Y$. Außerdem wählen wir ein $y'_0 \in U_0 \cap U_1$ mit $r(y_0) = x_0$, wobei wir hier die Bezeichnungen aus Proposition 11.2 beibehalten. Außerdem definieren wir eine Abbildung $r' : U_0 \cap U_1 \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ durch Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} D^n \setminus (\mathbb{S}^{n-1} \cup \{0\}) & \xrightarrow[\cong]{x \mapsto \chi(x)} & U_0 \cap U_1 \\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|} \Big\| \simeq & \swarrow r' & \\ \mathbb{S}^{n-1} & & \end{array}$$

r' ist eine Homotopieäquivalenz und $r|_{U_0 \cap U_1} = f \circ r'$. Außerdem haben wir bereits festgestellt, dass H eine Homotopie zwischen der Komposition $U_0 \xrightarrow{r} X \xrightarrow{j} Y$ und der Inklusion $U_0 \rightarrow Y$ ist. Wie in Proposition 10.8 sei p der Weg, den y'_0 während dieser Homotopie durchläuft; das ist der ‚direkte‘ Weg von y_0 nach y'_0 . All dies liefert uns ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}, 1) & \xrightarrow{f\#} & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{j\#} & \pi_1(Y, y_0) \\ \cong \uparrow r'\# & & \cong \uparrow r\# & & \cong \uparrow h_p \\ \pi_1(U_0 \cap U_1, y'_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_0, y'_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, y'_0), \end{array}$$

wobei alle nicht beschrifteten Pfeile von Inklusionen induzierte Abbildungen bezeichnen. Aus dem bereits oben über die untere Reihe gezeigten, der Kommutativität des Diagramms und der Tatsache, dass die vertikalen Pfeile Isomorphismen bezeichnen, erhalten wir nun:

11.4 Proposition. *Sei X ein Raum, $n \geq 2$, $f : (\mathbb{S}^{n-1}, 1) \rightarrow (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f D^n$ und $j : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ die kanonische*

Einbettung. Dann ist $j_{\#}$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der das Bild von $f_{\#}$ enthält. \square

Wir benutzen nun noch, dass wir $\pi_1(\mathbb{S}^{n-1})$ kennen.

11.5 Proposition. Sei X ein Raum, $n \geq 3$, $f: (\mathbb{S}^{n-1}, 1) \rightarrow (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f D^n$ und $j: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Dann ist $j_{\#}$ ein Isomorphismus. \square

11.6 Proposition. Sei X ein Raum, $f: (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ eine stetige Abbildung, $Y := X \cup_f D^2$ und $j: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ die kanonische Einbettung. Ist $e \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger, dann ist $j_{\#}$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der $f_{\#}(e)$ enthält. \square

11.7 Bemerkung. Ist $h: I/\{0,1\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ein Homöomorphismus mit $h([\{0,1\}]) = 1$ und $q: I \rightarrow I/\{0,1\}$ die Quotientenabbildung, so ist $e := [h \circ q]$ ein Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. Ist nun (X, x_0) ein Raum mit Basispunkt und $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, $\alpha = [w]$, so definiert, da $w(0) = w(1)$, $f \circ h \circ q = w$ eine Abbildung $f: (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$, und es ist $f_{\#}(e) = \alpha$. Durch Ankleben einer 2-Zelle an X mit Hilfe von f (also entlang w) kann man also das Element α gezielt ‚abschießen‘.

Projektive Räume

In Aufgabe 52 haben wir gesehen, dass man die reell-projektiven Räume $\mathbb{R}P^n$ durch sukzessives Ankleben von Zellen aus dem einpunktigen Raum erhalten kann. Wir wollen nun sehen, wie man daraus mit Hilfe des eben gezeigten die Fundamentalgruppen dieser Räume bestimmen kann.

Sei $p_n: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ die Projektion, die sich aus der Definition von $\mathbb{R}P^n$ als Quotient von \mathbb{S}^n , bei dem gegenüberliegende Punkte identifiziert werden, ergibt. In Aufgabe 52 wurde gezeigt, dass $\mathbb{R}P^n \approx \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{p_{n-1}} D^n$. Wir bemerken an dieser Stelle, dass man diesen Homöomorphismus so erhält, dass

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\text{Inklusion}} & \mathbb{S}^n \\
 \downarrow p_{n-1} & & \downarrow p_n \\
 \mathbb{R}P^{n-1} & \xrightarrow{j^{n-1}} \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{p_{n-1}} D^n \xrightarrow{\approx} & \mathbb{R}P^n
 \end{array}$$

kommutiert, wobei j^{n-1} die kanonische Inklusion bezeichne. Wir nehmen an, dass die Homöomorphismen so gewählt sind und bestimmen Basispunkte $x_n \in \mathbb{R}P^n$ durch $x_{n+1} = j^n(x_n)$.

Es ist $\mathbb{R}P^0$ ein einpunktiger Raum, also $\pi_1(\mathbb{R}P^0, x_0) = \{e\}$. Es ist $\mathbb{R}P^1 \approx \mathbb{S}^1$, also $\pi_1(\mathbb{R}P^1, x_1) \cong \mathbb{Z}$. Einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}P^1$ und \mathbb{S}^1 kann man zum Beispiel so beschreiben: Die stetige Abbildung $\text{sqr}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\text{sqr}(z) := z^2$, ist surjektiv, also eine Quotientenabbildung, da \mathbb{S}^1 kompakt ist. Da nun $\text{sqr}(x) = \text{sqr}(y) \iff (x = y) \vee (x = -y)$ gibt es einen

Homöomorphismus $h: \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, so dass $h \circ p_n = \text{sqr}$. Da wir uns in Proposition 9.16 bereits überlegt haben, dass die Abbildung sqr vom Grad 2 ist, kann man also Isomorphismen so wählen, dass

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) & \xrightarrow{(p_1)_\#} & \pi_1(\mathbb{R}P^1, x_1) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} \end{array}$$

kommutiert. Aus Proposition 11.6 angewandt auf $\mathbb{R}P^1 \cup_{p_1} D^2$ ergibt sich also $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}_2$. Mit Proposition 11.5 folgt nun induktiv $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_n) \cong \mathbb{Z}_2$ für alle $n \geq 2$. Zusammenfassend und etwas genauer:

11.8 Proposition. *Es ist*

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \{e\}, & n = 0, \\ \mathbb{Z}, & n = 1, \\ \mathbb{Z}_2, & n \geq 2. \end{cases}$$

Die von der Inklusion induzierte Abbildung $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^{n+1})$ ist ein Epimorphismus für $n = 1$ und ein Isomorphismus für $n \geq 2$. \square

Beweis des Satzes von Seifert und van Kampen

Nachdem wir gesehen haben, wie der Satz von Seifert und van Kampen anzuwenden ist und damit hoffentlich auch seine Aussage besser verstanden haben, beenden wir seinen Beweis.

Beweis von Satz 10.21. Wir für den Homomorphismus h in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(U_0, x_0) & & \\ & & \downarrow i_0 & \searrow i_{\#}^0 & \\ \pi_1(U_1, x_0) & \xrightarrow{i_1} & \pi_1(U_0, x_0) * \pi_1(U_1, x_0) & & \\ & \searrow & \downarrow h & \searrow & \\ & & & & \pi_1(X, x_0) \\ & & \swarrow i_{\#}^1 & & \end{array}$$

und den kleinsten Normalteiler N von $\pi_1(U_0, x_0) * \pi_1(U_1, x_0)$ mit $N \supset \left\{ i_0(j_{\#}^0(\alpha))i_1(j_{\#}^1(\alpha))^{-1} : \alpha \in \pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) \right\}$ zu zeigen, dass h ein Epimorphismus mit Kern N ist. Wir haben bereits gezeigt, dass h ein Epimorphismus ist (dies ist eine Umformulierung von Proposition 10.10) und dass $N \subset \ker h$ (dies ist eine Umformulierung von $i_{\#}^0 \circ j_{\#}^0 = i_{\#}^1 \circ j_{\#}^1$).

Es bleibt $\ker h \subset N$ zu zeigen. Nun ist jedes Element $\gamma \in \pi_1(U_0, x_0) * \pi_1(U_1, x_0)$ von der Form $i_{r_0}(\alpha_0) \cdots i_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1})$, und es ist $\gamma \in \ker h \iff i_{\#}^{r_0}(\alpha_0) \cdots i_{\#}^{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e$. Wir betrachten nun das kommutative (siehe Lemma 10.18) Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0 \cap U_1, x_0) & \xrightarrow{j_{\#}^0} & \pi_1(U_0, x_0) \\ \downarrow j_{\#}^1 & & \downarrow \phi_0 := q \circ i_0 \\ \pi_1(U_1, x_0) & \xrightarrow{\phi_1 := q \circ i_1} & (\pi_1(U_0, x_0) * \pi_1(U_1, x_0))/N. \end{array}$$

Es ist $\gamma \in N \iff q(\gamma) = e \iff \phi_{r_0}(\alpha_0) \cdots \phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1})$.

Wir haben also zu zeigen, dass aus $i_{\#}^{r_0}(\alpha_0) \cdots i_{\#}^{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e$ folgt, dass $\phi_{r_0}(\alpha_0) \cdots \phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e$. Dazu werden wir von P keine weiteren Eigenschaften als $\phi_0 \circ j_{\#}^0 = \phi_1 \circ j_{\#}^1$ benutzen. Dieser Teil des Beweises ähnelt dem Beweis der Surjektivität in Proposition 10.10, nur dass wir anstelle von Schleifen Homotopien von Schleifen untersuchen. Leider ist dieser Teil deutlich technischer. Er folgt nun.

Sei also $n \in \mathbb{N}$ und für $0 \leq k < n$ sei $r_k \in \{0, 1\}$ und $\alpha_k \in \pi_1(U_{r_k}, x_0)$, so dass $\phi_{r_0}(\alpha_0) \cdots \phi_{r_{n-1}}(\alpha_{n-1}) = e$. Es sei $H: I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie, die diese Gleichheit zeigt, und zwar sei $H(0, \bullet) = H(1, \bullet) = H(\bullet, 1) = c_{x_0}$ und $H(\bullet, 1)|_{[k/n, (k+1)/n]}$ repräsentiere α_k . Nun wenden wir wieder das Lebesgue-Lemma an, um ein $m \in \mathbb{N}$ zu erhalten, so dass mit $N := mn$ für alle k, l mit $0 \leq k, l < N$ ein $s_{k,l}$ mit $w[[k/N, (k+1)/N] \times [l/N, (l+1)/N]] \subset U_{s_{k,l}}$ existiert. Wir können diese $s_{k,l}$ so wählen, dass $s_{k,0} = r_{\lfloor k/m \rfloor}$ für alle k .

Zunächst zeigen wir, dass wir es so einrichten können, dass H auf allen Gitterpunkten den Wert x_0 annimmt, dass also $H(k/N, l/N) = x_0$ für alle $0 \leq k, l \leq N$. Dazu definieren wir für alle $0 < k < N$, $0 \leq l < N$ einen Weg $v_{k,l}: I \rightarrow U_{s_{k-1,l}} \cap U_{s_{k,l}}$ durch $v_{k,l}(t) := H(k/N, (l+t)/N)$ und einen Weg $w_{k,l}$ von $H(k/N, l/N)$ nach x_0 , der in U_0 verläuft, falls $H(k/N, l/N) \in U_0$, in U_1 , falls $H(k/N, l/N) \in U_1$ und konstant ist, falls $H(k/N, l/N) = x_0$. Außerdem setzen wir $w_{k,N} = c_{x_0}$ für $0 < k < N$. Dann wählen wir für alle $0 < k < N$, $0 \leq l < N$ eine Abbildung $F_{k,l}: I \times I \rightarrow U_{s_{k-1,l}} \cap U_{s_{k,l}}$ mit $F_{k,l}(0, \bullet) = F_{k,l}(1, \bullet) = v_{k,l}$ und $F_{k,l}(\bullet, 0) = w_{k,l} * w_{k,l}^-$, $F_{k,l}(\bullet, 1) = w_{k+1,l} * w_{k+1,l}^-$. Dies ist möglich, da die auf dem Rand vorgegebene Abbildung homotop zu einer konstanten Abbildung ist (siehe Aufgabe 58). Nun können wir H , indem wir an der Stelle $\{k/N\} \times [l/N, (l+1)/N]$ die Abbildung $F_{k,l}$ einpassen, so abändern, dass die oben bemerkten Eigenschaften von H erhalten bleiben und H zusätzlich auf allen Gitterpunkten den Wert x_0 annimmt. Wir werden diese geänderte Abbildung weiterhin H nennen.

Die alten w und v vergessend definieren wir nun Wege

$$\begin{aligned} w_{k,l}: I &\rightarrow X, & 0 \leq k < N, 0 \leq l \leq N, \\ t &\mapsto H((k+t)/N, l/N), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v_{k,l}: I &\rightarrow X, & 0 \leq k \leq N, 0 \leq l < N, \\ t &\mapsto H(k/N, (l+t)/N). \end{aligned}$$

Für $0 \leq k, l < N$ gibt uns das Klassen $\beta_{k,l}, \gamma_{k,l}, \delta_{k,l}, \epsilon_{k,l} \in \pi_1(U_{s_{k,l}})$ durch

$$\beta_{k,l} := [w_{k,l}], \quad \gamma_{k,l} := [w_{k,l+1}], \quad \delta_{k,l} := [v_{k,l}], \quad \epsilon_{k,l} := [v_{k+1,l}].$$

Nun ist $\alpha_k = \beta_{mk,0} \beta_{m(k+1),0} \cdots \beta_{m(k+1)-1,0}$ für $0 \leq k < n$ und $\gamma_{k,N-1} = e$ für alle $0 \leq k < N$. Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \phi_{s_{0,0}}(\beta_{0,0}) \phi_{s_{1,0}}(\beta_{1,0}) \cdots \phi_{s_{N-1,0}}(\beta_{N-1,0}) &= \\ &= \phi_{s_{0,N-1}}(\gamma_{0,N-1}) \phi_{s_{1,N-1}}(\gamma_{1,N-1}) \cdots \phi_{s_{N-1,N-1}}(\gamma_{N-1,N-1}). \end{aligned}$$

Wir tun dies in zwei Schritten.

Für alle $0 \leq k < N$ und $0 \leq l < N-1$ ist $\phi_{s_{k,l}}(\gamma_{k,l}) = \phi_{s_{k,l+1}}(\beta_{k,l+1})$: Nach Definition ist $\gamma_{k,l} = [w_{k,l+1}]$, $\beta_{k,l+1} = [w_{k,l+1}]$. Ist $s_{k,l} = s_{k,l+1}$, so ist $\gamma_{k,l} = \beta_{k,l+1}$ und alles klar. Ist $s_{k,l} \neq s_{k,l+1}$, so leben $\gamma_{k,l}$ und $\beta_{k,l+1}$ in verschiedenen Gruppen. In diesem Fall verläuft aber $w_{k,l+1}$ ganz in $U_0 \cap U_1$, so dass wir ein $\rho \in \pi_1(U_0 \cap U_1)$ durch $\rho := [w_{k,l+1}]$ definieren können. Es ist dann $\phi_{s_{k,l}}(\gamma_{k,l}) = (\phi_{s_{k,l}} \circ j_{\#}^{s_{k,l}})(\rho) = (\phi_{s_{k,l+1}} \circ j_{\#}^{s_{k,l+1}})(\rho) = \phi_{s_{k,l+1}}(\beta_{k,l+1})$.

Für alle $0 \leq l < N$ ist

$$\phi_{s_{0,l}}(\beta_{0,l}) \cdots \phi_{s_{N-1,l}}(\beta_{N-1,l}) = \phi_{s_{0,l}}(\gamma_{0,l}) \cdots \phi_{s_{N-1,l}}(\gamma_{N-1,l}) :$$

Zunächst zeigt $H|_{[k/N, (k+1)/N] \times [l/N, (l+1)/N]}$ für $0 \leq k < N$, dass $\beta_{k,l} = \delta_{k,l} \gamma_{k,l} \epsilon_{k,l}^{-1}$. Es ist also

$$\begin{aligned} \phi_{s_{0,l}}(\beta_{0,l}) \cdots \phi_{s_{N-1,l}}(\beta_{N-1,l}) &= \\ &= \phi_{s_{0,l}}(\delta_{0,l} \gamma_{0,l} \epsilon_{0,l}^{-1}) \cdots \phi_{s_{N-1,l}}(\delta_{N-1,l} \gamma_{N-1,l} \epsilon_{N-1,l}^{-1}) = \\ &= \phi_{s_{0,l}}(e) \phi_{s_{0,l}}(\gamma_{0,l}) \phi_{s_{0,l}}(\epsilon_{0,l})^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \phi_{s_{1,l}}(\delta_{1,l}) \phi_{s_{1,l}}(\gamma_{1,l}) \cdots \\ &\quad \cdots \phi_{s_{N-2,l}}(\gamma_{N-2,l}) \phi_{s_{N-2,l}}(\epsilon_{N-2,l})^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \phi_{s_{N-1,l}}(\delta_{N-1,l}) \phi_{s_{N-1,l}}(\gamma_{N-1,l}) \phi_{s_{N-1,l}}(e). \end{aligned}$$

Es genügt also, für $0 \leq k < N-1$ zu zeigen, dass $\phi_{s_{k,l}}(\epsilon_{k,l}) = \phi_{s_{k+1,l}}(\delta_{k+1,l})$. Nun werden $\epsilon_{k,l}$ und $\delta_{k+1,l}$ beide von $v_{k+1,l}$ repräsentiert, so dass sie für $s_{k,l} = s_{k+1,l}$ gleich sind und es ansonsten ein $\rho \in \pi_1(U_0 \cap U_1)$ mit $\epsilon_{k,l} = j_{\#}^{s_{k,l}}(\rho)$, $\delta_{k+1,l} = j_{\#}^{s_{k+1,l}}(\rho)$ gibt, so dass dies wieder aus der Kommutativität des Diagramms folgt. \square

Ein weiterer Blick auf Push-Outs

11.9 Proposition (Existenz und Konstruktion des Push-Outs). *Es seien*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ g_1 \downarrow & & \\ & & H_1 \end{array}$$

Gruppenhomomorphismen, $N \triangleleft H_0 * H_1$ der kleinste Normalteiler mit

$$N \supset \{i_0(g_0(\alpha))i_1(g_1(\alpha))^{-1} : \alpha \in G\}$$

und $q: H_0 * H_1 \rightarrow (H_0 * H_1)/N$ die Quotientenabbildung. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ g_1 \downarrow & & \downarrow q \circ i_0 \\ H_1 & \xrightarrow{q \circ i_1} & (H_0 * H_1)/N. \end{array}$$

ein Push-Out-Diagramm. □

11.10 Proposition (Universelle Eigenschaft des Push-Out). *Es sei*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ g_1 \downarrow & & \downarrow h_0 \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & K \end{array}$$

ein Diagramm von Gruppen und Homomorphismen. Dann ist dieses Diagramm genau dann ein Push-Out-Diagramm, wenn es kommutiert und für jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ g_1 \downarrow & & \downarrow h'_0 \\ H_1 & \xrightarrow{h'_1} & K' \end{array}$$

ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $k: K \rightarrow K'$ existiert, so dass $k \circ h_0 = h'_0$ und $k \circ h_1 = h'_1$, so dass also

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ g_1 \downarrow & & \downarrow h_0 \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & K \end{array} \begin{array}{c} \searrow h'_0 \\ \downarrow k \\ \searrow h'_1 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ K' \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Der Beweis, der die universelle Eigenschaft des freien Produkts und eine ähnliche Eigenschaft von Faktorgruppen benutzt, ist zur Übung empfohlen. \square

Aus der universellen Eigenschaft ergibt sich wie üblich die Eindeutigkeit.

11.11 Proposition (Eindeutigkeit des Push-Outs). *Sind*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ \downarrow g_1 & & \downarrow h_0 \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & K \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g_0} & H_0 \\ \downarrow g_1 & & \downarrow h'_0 \\ H_1 & \xrightarrow{h'_1} & K' \end{array}$$

Push-Out-Diagramme, so existiert ein Isomorphismus $k: K \rightarrow K'$, so dass

$$\begin{array}{ccc} & H_0 & \\ & \downarrow h_0 & \\ H_1 & \xrightarrow{h_1} & K \\ & \searrow h'_1 & \nearrow h'_0 \\ & & K' \end{array}$$

\cong

kommutiert.

\square

Abschnitt 12

Simplizialkomplexe

Wir haben im Abschnitt gesehen, wie sich die Fundamentalgruppe eines Raumes ändert, wenn wir an ihn eine Zelle ankleben. Dies wäre nun der Zeitpunkt, *Zellkomplexe* einzuführen, dies sind Räume, die man erhält, indem man mit einem diskreten Raum startet (dessen Punkte nennen wir 0-Zellen), an diesen dann 1-Zellen anklebt, an den entstandenen Raum dann 2-Zellen und so weiter. Wir begnügen uns aber mit einem Spezialfall davon, den *Simplizialkomplexen*. Diese lassen sich vollständig (also einschließlich der Anhefteabbildungen der Zellen) kombinatorisch beschreiben. Wir werden dann Eigenschaften des Raumes, beispielsweise seine Fundamentalgruppe, ebenfalls kombinatorisch beschreiben wollen.

Abstrakte Simplizialkomplexe und Triangulierungen

12.1 Definition. Ein (*abstrakter*) *Simplizialkomplex* \mathcal{S} ist eine Menge endlicher Mengen, die abgeschlossen unter Teilmengenbildung ist, so dass also für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ und $\tau \subset \sigma$ gilt, dass $\tau \in \mathcal{S}$. In dieser Situation nennen wir σ einen $(\#\sigma - 1)$ -Simplex von \mathcal{S} und τ eine Seite von σ .

Wir nennen $V(\mathcal{S}) := \bigcup \mathcal{S}$ die *Eckenmenge* des abstrakten Simplizialkomplexes \mathcal{S} . Es ist dann $\{\{v\} : v \in V(\mathcal{S})\}$ die Menge der 0-Simplizes von \mathcal{S} . Im allgemeinen werden wir nicht zwischen der Ecke v und dem 0-Simplex $\{v\}$ unterscheiden.

Sind \mathcal{S} und \mathcal{T} abstrakte Simplizialkomplexe und ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, so nennen wir \mathcal{T} einen *Unterkomplex* von \mathcal{S} .

12.2 Bemerkung. Nach dieser Definition gibt es zwei verschiedene abstrakte Simplizialkomplexe mit leerer Eckenmenge, nämlich \emptyset und $\{\emptyset\}$. Diese Unterscheidung ist tatsächlich manchmal sinnvoll.

Man beachte auch, dass außer dem Simplizialkomplex \emptyset jeder abstrakte Simplizialkomplex das (-1) -Simplex \emptyset enthält, auch wenn wir es häufig nicht erwähnen.

12.3 Definition. Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq -1$. Der *Standard- n -Simplex* ist der Raum

$$\Delta^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ für alle } i, \sum_i x_i = 1 \right\}.$$

Allgemeiner setzen wir für eine endliche Menge M

$$\Delta^M := \left\{ x \in \mathbb{R}^M : x_i \geq 0 \text{ für alle } i, \sum_i x_i = 1 \right\}.$$

12.4 Bemerkung. Offenbar ist $\Delta^M \approx \Delta^{\#M-1}$, und wir werden oft Δ^n mit $\Delta^{\{0,1,\dots,n\}}$ identifizieren. Durch $n \neq n+1$ entsteht hoffentlich keine Verwirrung, die Notation ist in dieser Hinsicht nicht optimal.

12.5 Definition. Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex. Für $\tau \subset \sigma \in \mathcal{S}$ definieren wir

$$i_\tau^\sigma : \Delta^\tau \rightarrow \Delta^\sigma$$

$$i_\tau^\sigma(x)_k := \begin{cases} x_k, & k \in \tau, \\ 0, & k \notin \tau. \end{cases}$$

Nun definieren wir

$$|\mathcal{S}| := \coprod_{\sigma \in \mathcal{S}} \Delta^\sigma / \sim$$

mit $x \sim x'$ für $x \in \Delta^\sigma$, $x' \in \Delta^{\sigma'}$ genau dann, wenn ein $y \in \Delta^{\sigma \cap \sigma'}$ mit $i_{\sigma \cap \sigma'}^\sigma(y) = x$ und $i_{\sigma \cap \sigma'}^{\sigma'}(y) = x'$ existiert. Wir nennen den Raum $|\mathcal{S}|$ die *Realisierung von \mathcal{S}* . Für $\sigma \in \mathcal{S}$ definieren wir die Abbildung

$$\chi_\sigma : \Delta^\sigma \rightarrow |\mathcal{S}|$$

als Komposition der Inklusionsabbildung in die topologische Summe und der Quotientenabbildung, wir nennen sie die *charakteristische Abbildung von σ* .

12.6 Lemma. $|\mathcal{S}|$ trägt die Finaltopologie bezüglich der Abbildungen χ_σ , $\sigma \in \mathcal{S}$.

Beweis. Dies folgt sofort daraus, wie topologische Summen und Quotienten als Finaltopologien definiert sind. \square

12.7 Proposition. Ist \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex und $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ ein Unterkomplex, so gibt es eine eindeutige Abbildung, $j : |\mathcal{T}| \rightarrow |\mathcal{S}|$, so dass

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{T}| & \xrightarrow{j} & |\mathcal{S}| \\ & \swarrow \chi_\sigma^{\mathcal{T}} & \searrow \chi_\sigma^{\mathcal{S}} \\ & \Delta^\sigma & \end{array}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{T}$ kommutiert. Diese Abbildung ist eine Einbettung mit abgeschlossenem Bild.

Wir können also in dieser Situation $|\mathcal{T}|$ als Unterraum von $|\mathcal{S}|$ auffassen.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass $|\mathcal{T}|$ Vereinigung der Bilder der $\chi_\sigma^\mathcal{T}$ ist. Betrachten wir nun $\sigma, \sigma' \in \mathcal{T}$ und $x \in \Delta^\sigma, x' \in \Delta^{\sigma'}$. Dann ist $\chi_\sigma^\mathcal{T}(x) = \chi_{\sigma'}^\mathcal{T}(x')$ genau dann, wenn $y \in \Delta^{\sigma \cap \sigma'}$ mit $x = i_{\sigma \cap \sigma'}^\sigma(y), x' = i_{\sigma \cap \sigma'}^{\sigma'}(y)$ existiert, also genau dann, wenn $\chi_\sigma^\mathcal{S}(x) = \chi_{\sigma'}^\mathcal{S}(x')$. Damit ist j wohldefiniert und injektiv. Die Stetigkeit folgt sofort daraus, dass $|\mathcal{T}|$ die Finaltopologie bezüglich der $\chi_\sigma^\mathcal{T}$ trägt und die $\chi_\sigma^\mathcal{S}$ stetig sind.

Sei nun $A \subset |\mathcal{T}|$ abgeschlossen und $\sigma \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$(\chi_\sigma^\mathcal{S})^{-1}[j[A]] = \bigcup_{\tau: \sigma \supset \tau \in \mathcal{T}} i_\tau^\sigma[(\chi_\tau^\mathcal{T})^{-1}[A]]$$

endliche Vereinigung kompakter Mengen und damit abgeschlossen. Also ist $j[A]$ abgeschlossen in $|\mathcal{S}|$. Damit ist j eine Einbettung mit abgeschlossenem Bild. \square

12.8 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine *Triangulierung von X* ist ein abstrakter Simplicialkomplex \mathcal{S} zusammen mit einem Homöomorphismus $h: |\mathcal{S}| \xrightarrow{\cong} X$. Ein Raum heißt *triangulierbar*, wenn er eine Triangulierung besitzt.

12.9 Beispiel. Sei M eine endliche Menge. Dann ist $\mathcal{P}(M)$ ein abstrakter Simplicialkomplex. Für $\sigma \in \mathcal{P}(M)$ betrachten wir die Abbildung $i_\sigma^M: \Delta^\sigma \rightarrow \Delta^M$. Da $i_\sigma^M \circ i_\tau^\sigma = i_\tau^M$ für $\tau \subset \sigma \in \mathcal{P}(M)$, gibt es eine stetige Abbildung $h: |\mathcal{P}(M)| \rightarrow \Delta^M$ mit $h \circ \chi_\sigma = i_\sigma^M$ für alle $\sigma \in \mathcal{P}(M)$.

Es ist leicht zu sehen, dass die Abbildung h eine Bijektion ist. Da $i_M^M = \text{id}_{\Delta^M}$ und alle i_σ^M stetig sind, trägt Δ^M die Finaltopologie bezüglich der $h \circ \chi_\sigma$. Daher ist h ein Homöomorphismus, das heißt, eine Triangulierung von Δ^M .

Die Komponenten eines Simplicialkomplexes

Um zu sehen, wie mit Simplicialkomplexen umzugehen ist, wollen wir die Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten eines solchen (also seiner Realisierung) bestimmen.

Sei \mathcal{S} ein Simplicialkomplex. Auf seiner Eckenmenge $V(\mathcal{S})$ definieren wir folgende Äquivalenzrelation.

$$u \sim u' \iff \text{Es ex. } n \in \mathbb{N} \text{ und } v_0, \dots, v_n \in V(\mathcal{S}) \text{ mit } v_0 = u, v_n = u' \\ \text{und } \{u_i, u_{i+1}\} \in \mathcal{S} \text{ für alle } 0 \leq i < n. \quad (12.1)$$

Dies ist eine kombinatorische Variante der Äquivalenzrelation, die wir zur Definition der Wegzusammenhangskomponenten benutzt haben. An Stelle stetiger Wege betrachten wir Kantenzüge. Auch hier sieht man leicht, dass es sich tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt.

Eine wesentliche Beobachtung ist:

12.10 Lemma. Sei $C \in V(\mathcal{S})/\sim$ eine Äquivalenzklasse der oben definierten Äquivalenzrelation und $\sigma \in \mathcal{S}$. Dann ist $\sigma \cap C = \emptyset$ oder $\sigma \subset C$.

Beweis. Sind $v, v' \in \sigma \in \mathcal{S}$, so ist $\{v, v'\} \in \mathcal{S}$, also $v \sim v'$. □

Für eine Äquivalenzklasse C bezüglich \sim setzen wir nun

$$K_C := \bigcup_{\substack{\sigma \in \mathcal{S} \\ \sigma \subset C}} \chi_\sigma[\Delta^\sigma] \subset |\mathcal{S}|. \quad (12.2)$$

Aus dem Lemma folgt direkt:

12.11 Proposition. Es ist $|\mathcal{S}| = \bigcup_{C \in V(\mathcal{S})/\sim} K_C$. □

Wir wollen nun zeigen, dass dies die Zerlegung von $|\mathcal{S}|$ in Zusammenhangskomponenten ist.

12.12 Proposition. K_C ist offen-abgeschlossen.

Beweis. Sei $\sigma \in \mathcal{S}$. Ist $\chi_\sigma^{-1}[K_C] \neq \emptyset$, so ist $\sigma \subset C$. Ist nämlich $x \in \text{im } \chi_\sigma \cap K_C$, so gibt es ein $\sigma' \in \mathcal{S}$ mit $\sigma' \subset C$ und $x \in \text{im } \chi_\sigma \cap \text{im } \chi_{\sigma'}$. Dann ist $\emptyset \neq \sigma \cap \sigma' \subset C$, also auch $\sigma \subset C$.

Ist nun $\sigma \subset C$, so ist $\chi_\sigma^{-1}[K_C] = \Delta^\sigma$. In jedem Fall ist also $\chi_\sigma^{-1}[K_C]$ offen-abgeschlossen in Δ^σ . Da $|\mathcal{S}|$ die Finaltopologie bezüglich aller Abbildungen χ_σ trägt, ist K_C offen-abgeschlossen. □

Das Argument aus diesem Beweis zeigt auch:

12.13 Proposition. Sind $C, C' \in V(\mathcal{S})/\sim$ und $C \neq C'$, so ist $K_C \cap K_{C'} = \emptyset$. □

12.14 Proposition. K_C ist wegzusammenhängend.

Beweis. Zunächst sind die Ecken von K_C alle in der selben Wegzusammenhangskomponente von $|\mathcal{S}|$. Genauer: Sind $v, v' \in V(\mathcal{S})$ und $v \sim v'$, so sind $\chi_{\{v\}}(e_v)$ und $\chi_{\{v'\}}(e_{v'})$ in der selben Wegzusammenhangskomponente. Dabei haben wir die Bezeichnung $\Delta^{\{v\}} = \{e_v\}$ gewählt. Aufgrund der Definition von \sim genügt es, den Fall $\{v, v'\} \in \mathcal{S}$ zu betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned} I &\rightarrow |\mathcal{S}| \\ t &\mapsto \chi_{\{v, v'\}} \left((1-t) i_v^{\{v, v'\}}(e_v) + t \cdot i_{v'}^{\{v, v'\}}(e_{v'}) \right) \end{aligned}$$

ein Weg von $\chi_{\{v\}}(e_v) = \chi_{\{v, v'\}} \left(i_v^{\{v, v'\}}(e_v) \right)$ nach $\chi_{\{v'\}}(e_{v'})$.

Sei nun $x \in K_C$ beliebig. Dann existieren $\sigma \in \mathcal{S}$ und $y \in \Delta^\sigma$ mit $\sigma \subset C$ und $x = \chi_\sigma(y)$. Sei $v \in \sigma$. Da Δ^σ wegzusammenhängend ist, ist x in der selben Wegzusammenhangskomponente von $|\mathcal{S}|$ wie $\chi_\sigma(i_v^\sigma(e_v)) = \chi_{\{v\}}(e_v)$. □

Zusammenfassend haben wir:

12.15 Satz. Sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex und \sim die Äquivalenzrelation auf $V(\mathcal{S})$ aus (12.1). Dann ist

$$|\mathcal{S}| = \bigcup_{C \in V(\mathcal{S})/\sim} K_C$$

mit K_C wie in (12.2) die disjunkte Zerlegung von $|\mathcal{S}|$ in Zusammenhangskomponenten, und diese stimmen mit den Wegzusammenhangskomponenten überein und sind offen. \square

Die Fundamentalgruppe eines Simplicialkomplexes

Wir wollen nun die Fundamentalgruppe eines Simplicialkomplexes beschreiben. Der Einfachheit halber werden wir uns dabei auf endliche Simplicialkomplexe beschränken. Diese bauen wir Simplex für Simplex auf und verfolgen dabei, wie sich die Fundamentalgruppe ändert.

Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex, $k \geq 0$, σ eine $(k+1)$ -elementige Menge mit $\mathcal{P}(\sigma) \cap \mathcal{S} = \mathcal{P}(\sigma) \setminus \{\sigma\}$. Dann ist auch $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \cup \{\sigma\}$ ein abstrakter Simplicialkomplex.

Wir setzen $\partial\Delta^\sigma := \bigcup_{\tau \subsetneq \sigma} i_\tau^\sigma$. Man beachte, dass dies nicht der Rand im allgemeintopologischen Sinne ist. Es gibt einen Homöomorphismus $\Delta^\sigma \xrightarrow{\approx} D^k$, der $\partial\Delta^\sigma$ auf S^{k-1} abbildet. Wir schreiben dafür $(\Delta^\sigma, \partial\Delta^\sigma) \approx (D^k, S^{k-1})$.

Wir betrachten die kanonische Einbettung $j: |\mathcal{S}| \rightarrow |\mathcal{S}'|$ aus Proposition 12.7 und die Abbildung $\chi_\sigma: \Delta^\sigma \rightarrow |\mathcal{S}'|$. Wir definieren $f_\sigma: \partial\Delta^\sigma \rightarrow |\mathcal{S}|$ durch $j \circ f_\sigma = \chi_\sigma|_{\partial\Delta^\sigma}$. Man prüft nun leicht, dass $|\mathcal{S}'| \approx |\mathcal{S}| \cup_{f_\sigma} \Delta^\sigma$. Das Hinzufügen eines k -Simplexes ist also ein Spezialfall des Anheftens einer k -Zelle wie in Abschnitt 11 betrachtet.

Wir betrachten nun zunächst 1-dimensionale Simplicialkomplexe.

12.16 Definition. Ein Simplicialkomplex \mathcal{S} ist ein *Graph*, wenn er von Dimension höchstens 1 ist, das heißt, wenn $\#\sigma \leq 2$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$.

12.17 Definition. Ein Graph \mathcal{G} heißt ein *Baum*, wenn er zusammenhängend ist (das heißt, wenn $|\mathcal{G}|$ zusammenhängend ist, siehe aber Satz 12.15) und kreisfrei, wenn es also keine endliche Folge u_0, \dots, u_n mit $n > 2$, $u_0 = u_n$, $\{u_k, u_{k+1}\} \in \mathcal{G}$ für alle $0 \leq k < n$ und $u_k \neq u_{k'}$ für $0 \leq k < k' < n$ gibt.

Es ist plausibel, dass ein Graph, der kreisfrei ist, eine triviale Fundamentalgruppe hat. In der Tat gilt folgendes.

12.18 Proposition. Sei \mathcal{G} ein endlicher nicht-leerer Baum. Dann ist $|\mathcal{G}|$ zusammenziehbar und daher einfach zusammenhängend.

Beweis. Wir führen eine Induktion über die Zahl der Kanten durch. Ist diese 0, so besteht $|\mathcal{G}|$ aus genau einem Punkt. Ansonsten gibt es ein $\{u, v\} \in \mathcal{G}$, $u \neq v$, so dass $\{u' \in V(\mathcal{G}) : u' \neq v, \{u', v\} \in \mathcal{G}\} = \{u\}$. (Gäbe es keine solche Ecke v , so fände man einen Kreis, indem man an einer beliebigen Ecke losläuft, keine Ecke mehrfach benutzt, und aufhört, sobald man eine Ecke zum zweiten Mal erreicht.) Es ist dann also $\mathcal{G}' := \mathcal{G} \setminus \{\{v\}, \{u, v\}\}$ ein Unterkomplex und $|\mathcal{G}| \approx |\mathcal{G}'| \cup_{\chi_{\{u\}}} \Delta^{\{u, v\}} \simeq |\mathcal{G}'|$. Da \mathcal{G}' auch ein Baum ist, folgt die Behauptung nun per Induktion. \square

Wir wenden uns nun allgemeinen endlichen zusammenhängenden Graphen zu. Dazu wählen wir zunächst einen aufspannenden Baum und fügen dann schrittweise neue 1-Simplizes hinzu.

Sei \mathcal{G} ein Graph und \mathcal{T} ein aufspannender Baum von \mathcal{G} , also \mathcal{T} ein Baum, $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}$, $V(\mathcal{T}) = V(\mathcal{G})$. Wir wollen einen 1-Simplex hinzufügen, sei also $u_0, u_1 \in V(\mathcal{G})$, $\{u_0, u_1\} \notin \mathcal{G}$, $\mathcal{G}' := \mathcal{G} \cup \{\{u_0, u_1\}\}$.

Wir wollen nun gerne den Satz von Seifert und van Kampen anwenden. Dazu setzen wir $U_0 := |\mathcal{G}'| \setminus \{\chi_{\{u_0, u_1\}}(\frac{1}{2}e_{u_0} + \frac{1}{2}e_{u_1})\}$. Wir können Proposition 11.2 anwenden, um zu sehen, dass die Inklusionsabbildung $|\mathcal{G}| \rightarrow U_0$ eine Homotopieäquivalenz ist. Weiterhin wählen wir einen injektiven Weg $w: I \rightarrow |\mathcal{T}|$ von u_0 nach u_1 . Es gibt dann eine offene Umgebung U_1 von $w \cup \text{im } \chi_{u_0, u_1} \subset |\mathcal{G}'|$, so dass die Inklusionsabbildungen $\text{im } w \cup \text{im } \chi_{u_0, u_1} \rightarrow U_1$ und $\text{im } w \rightarrow U_0 \cap U_1$ Homotopieäquivalenzen sind. Da $\text{im } w \approx I$ zusammenziehbar ist und $\text{im } w \cup \text{im } \chi_{u_0, u_1} \approx \mathbb{S}^1$, folgt aus Korollar 10.22, dass $\pi_1(|\mathcal{G}|, u_0) * \mathbb{Z} \cong \pi_1(|\mathcal{G}'|, u_0)$. Dabei wird der erste Faktor des freien Produkts mit dem von der Inklusion $j: |\mathcal{G}| \rightarrow |\mathcal{G}'|$ induzierten Homomorphismus $j_{\#}$ abgebildet, und ein Erzeuger von \mathbb{Z} geht auf das von der Schleife $p_{u_0, u_1} * w^-$ repräsentierte Element, wenn wir mit p_{u_0, u_1} den Weg $t \mapsto \chi_{u_0, u_1}((1-t)e_{u_0} + te_{u_1})$ bezeichnen. Um diesen Isomorphismus mit einer anderen Ecke v_0 als Basispunkt auszudrücken, wählen wir für jede Ecke u einen Weg p_u von v_0 nach u , der in $|\mathcal{T}|$ verläuft. Da $|\mathcal{T}|$ einfach zusammenhängend ist, ist ein solcher bis auf Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$ eindeutig bestimmt. Wir betrachten die Isomorphismen

$$h_{p_{u_0}}: \pi_1(|\mathcal{G}|, u_0) \rightarrow \pi_1(|\mathcal{G}|, v_0) \text{ und } h'_{p_{u_0}}: \pi_1(|\mathcal{G}'|, u_0) \rightarrow \pi_1(|\mathcal{G}'|, v_0)$$

aus Definition 10.1. Es ist $h'_{p_{u_0}} \circ j_{\#} = j_{\#} \circ h_{p_{u_0}}$ und $h'_{p_{u_0}}[p_{u_0, u_1} * w^-] = [h_{p_{u_0}} * p_{u_0, u_1} * (p_{u_0} * w)^-]$. Nun ist $p_{u_0} * w$ ein Weg in $|\mathcal{T}|$ von v_0 nach u_1 , also $p_{u_0} * w \simeq p_{u_1}$ rel $\{0, 1\}$. Wir haben also einen Isomorphismus $\pi_1(|\mathcal{G}|, v_0) * \mathbb{Z} \cong \pi_1(|\mathcal{G}'|, v_0)$, wobei der erste Faktor des freien Produkts mit $j_{\#}$ abgebildet wird, und ein Erzeuger von \mathbb{Z} auf $[h_{p_{u_0}} * p_{u_0, u_1} * p_{u_1}^-]$ geht. Dies liefert zusammenfassend folgendes.

12.19 Proposition. *Sei \mathcal{G} ein endlicher Graph, \mathcal{T} ein aufspannender Baum und $v_0 \in V(\mathcal{G})$. Für jedes $u \in V(\mathcal{G})$ wählen wir einen Weg $p_u: I \rightarrow |\mathcal{T}| \subset |\mathcal{G}|$*

von v_0 nach u_0 . Außerdem bezeichne $p_{u_0, u_1}: I \rightarrow |\mathcal{G}|$ einen Weg von u_0 nach u_1 in dem 1-Simplex $\{u_0, u_1\}$. Für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{G}$ setzen wir

$$g_{u_0, u_1} := [p_{u_0} * p_{u_0, u_1} * p_{u_1}^-].$$

Dann ist $g_{u_0, u_1} = g_{u_1, u_0}^{-1}$, und für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$ ist $g_{u_0, u_1} = e$.

Wir wählen eine totale Ordnung auf $V(\mathcal{G})$. Dann wird $\pi_1(|\mathcal{G}|, v_0)$ frei von den g_{u_0, u_1} mit $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$, $u_0 < u_1$ erzeugt, das heißt

$$\coprod_{\substack{\{u_0, u_1\} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T} \\ u_0 < u_1}} \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(|\mathcal{G}|, v_0),$$

wobei $1 \in \mathbb{Z}$ zum Index $\{u_0, u_1\}$ auf g_{u_0, u_1} abgebildet wird, ist ein Isomorphismus.

Beweis. Für $g_{u_0, u_1} = e$, $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$, bemerken wir, dass $p_{u_0} * p_{u_0, u_1}$ in diesem Fall in $|\mathcal{T}|$ verläuft, also homotop relativ $\{0, 1\}$ zu p_{u_1} ist.

Der Isomorphismus folgt per Induktion über $\#(\mathcal{G} \setminus \mathcal{T})$, wobei der Induktionsanfang Proposition 12.18 ist und der Induktionsschritt in der vorhergehenden Diskussion ausgeführt wurde. \square

12.20 Notation. Für $k \geq 0$ ist das k -Skelett eines Simplicialkomplexes \mathcal{S} der Simplicialkomplex $\mathcal{S}^{(k)} := \{\sigma \in \mathcal{S} : \#\sigma \leq k + 1\}$.

Damit sind wir nun bereit, den endgültigen Satz zu formulieren und zu beweisen.

12.21 Satz. Sei \mathcal{S} ein endlicher zusammenhängender Simplicialkomplex, \mathcal{T} ein aufspannender Baum und $v_0 \in V(\mathcal{S})$. Wir wählen eine totale Ordnung auf $V(\mathcal{S})$. Für jedes $u \in V(\mathcal{S})$ wählen wir einen Weg $p_u: I \rightarrow |\mathcal{T}| \subset |\mathcal{S}^{(1)}|$ von v_0 nach u . Außerdem bezeichne $p_{u_0, u_1}: I \rightarrow |\mathcal{S}^{(1)}|$ einen Weg von u_0 nach u_1 in dem Simplex $\{u_0, u_1\}$. Für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{S}$ setzen wir

$$g_{u_0, u_1} := [p_{u_0} * p_{u_0, u_1} * p_{u_1}^-].$$

Dann ist $g_{u_0, u_1} = e$ für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$, die Gruppe $\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|, v_0)$ wird frei von den g_{u_0, u_1} mit $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T}$, $u_0 < u_1$ erzeugt, und die Abbildung

$$\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|, v_0) \xrightarrow{j\#} \pi_1(|\mathcal{S}|, v_0)$$

ist ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der

$$\{g_{u_0, u_1} g_{u_1, u_2} g_{u_0, u_2}^{-1} : \{u_0, u_1, u_2\} \in \mathcal{S}, u_0 < u_1 < u_2\}$$

enthält.

Beweis. Wieder führen wir einen Induktionsbeweis, dieses Mal über die Zahl der Simplizes von Dimension 2 und höher, also über $\#(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^{(1)})$. Den Induktionsanfang liefert Proposition 12.19.

Für den Induktionsschritt wählen wir ein inklusionsmaximales Simplex $\sigma \in \mathcal{S}$. Dann ist $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \setminus \{\sigma\}$ ein Unterkomplex, und wir haben einleitend gesehen, dass $|\mathcal{S}| \approx |\mathcal{S}'| \cup f_\sigma \Delta^\sigma$. Es sei $\#\sigma = k + 1$. Ist $k > 2$, so induziert nach Proposition 11.5 die Inklusion einen Isomorphismus $\pi_1(|\mathcal{S}'|) \rightarrow \pi_1(|\mathcal{S}|)$. Wir betrachten daher den Fall $k = 2$. Wir setzen $\sigma = \{u_0, u_1, u_2\}$ mit $u_0 < u_1 < u_2$ und betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(|\mathcal{S}'|, u_0) & \longrightarrow & \pi_1(|\mathcal{S}|, u_0) \\ h_{p_{u_0}} \downarrow \cong & & h_{p_{u_0}} \downarrow \cong \\ \pi_1(|\mathcal{S}'|, v_0) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_1(|\mathcal{S}|, v_0). \end{array}$$

Nach Proposition 11.6 ist der obere Homomorphismus ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der $[p_{u_0, u_1} * p_{u_1, u_2} * p_{u_2, u_0}]$ enthält. Der untere Homomorphismus $i_\#$ ist daher ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der das Element

$$\begin{aligned} h_{p_{u_0}}([p_{u_0, u_1} * p_{u_1, u_2} * p_{u_2, u_0}]) &= [p_{u_0} * p_{u_0, u_1} * p_{u_1, u_2} * p_{u_2, u_0} * p_{u_0}^-] = \\ &= [p_{u_0} * p_{u_0, u_1} * p_{u_1}^- * p_{u_1} * p_{u_1, u_2} * p_{u_2}^- * p_{u_2} * p_{u_2, u_0} * p_{u_0}^-] = \\ &= [p_{u_0} * p_{u_0, u_1} * p_{u_1}^-] * [p_{u_1} * p_{u_1, u_2} * p_{u_2}^-] * [p_{u_2} * p_{u_2, u_0} * p_{u_0}^-] = \\ &= j'_\#(g_{u_0, u_1} g_{u_1, u_2} g_{u_0, u_2}^{-1}) \end{aligned}$$

enthält, wobei j' die Inklusion $|\mathcal{S}^{(1)}| \rightarrow |\mathcal{S}'|$ ist. Ist $j'_\#$ ein Epimorphismus, so ist $j_\# = (i \circ j')_\# = i_\# \circ j'_\#$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der $\ker j'_\# \cup \{g_{u_0, u_1} g_{u_1, u_2} g_{u_0, u_2}^{-1}\}$ enthält. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung folgt die Behauptung. \square

Abschnitt 13

Homologie I

Wir werden nun die Homologiegruppen $H_i(\mathcal{S})$, $i \geq 0$ eines Simplizialkomplexes \mathcal{S} definieren.

Es lohnt sich, einen Moment einen Vergleich mit der Fundamentalgruppe anzustellen. Diese hatten wir für einen Raum (mit Basispunkt) definiert, ohne Bezug auf eine Triangulierung zu nehmen oder auch nur Triangulierbarkeit vorauszusetzen. Im letzten Abschnitt haben wir dann gezeigt, dass sich die Fundamentalgruppe mit Hilfe einer Triangulierung des Raumes bestimmen lässt. Ähnlich kann man Homologiegruppen eines beliebigen Raumes definieren, beispielsweise die *singulären Homologiegruppen* und dann später zeigen, wie sie sich für einen triangulierten Raum aus der Triangulierung berechnen lassen.

Wir werden hier stattdessen den klassischen Weg beschreiten und die *simplizialen Homologiegruppen* eines abstrakten Simplizialkomplexes definieren. Ihre Nützlichkeit entfaltet diese Theorie dann, nachdem man gezeigt hat, dass Simplizialkomplexe mit homöomorphen Realisierungen (in der Tat genügt Homotopieäquivalenz) isomorphe Homologiegruppen haben. Dieses Resultat werden wir in dieser Vorlesung aus Zeitgründen nicht vollständig beweisen können, wir werden aber schon bald die Spezialfälle $H_0(\mathcal{S})$ und $H_1(\mathcal{S})$ behandeln. Für diese Gruppen werden wir Beschreibungen mit Hilfe der Zusammenhangskomponenten von $|\mathcal{S}|$ beziehungsweise der Fundamentalgruppe von $|\mathcal{S}|$ erhalten.

Definition der Homologiegruppen

Im folgenden sei R ein kommutativer Ring mit 1. Viele der zu definierenden Objekte werden R -Moduln sein. Dabei werden wir hauptsächlich an den Fällen $R = \mathbb{Z}$ und $R = k$, wobei k ein Körper ist, interessiert sein. \mathbb{Z} -Moduln sind nichts weiter als abelsche Gruppen, k -Moduln sind k -Vektorräume. An Körpern werden uns hauptsächlich die Fälle $k = \mathbb{Q}$ und $k = \mathbb{Z}_2$ interessieren.

13.1 Definition. Sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplizialkomplex und $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten zunächst den freien R -Modul mit Basis

$$\Sigma_k(\mathcal{S}) := \{(v_0, \dots, v_k) : \{v_0, \dots, v_k\} \in \mathcal{S}, \#\{v_0, \dots, v_k\} = k + 1\},$$

das heißt den Modul

$$\bigoplus_{(v_0, \dots, v_k) \in \Sigma_k(\mathcal{S})} R,$$

wobei wir $1 \in R$ aus dem zu (v_0, \dots, v_k) gehörigen Summanden mit (v_0, \dots, v_k) identifizieren. Wir nehmen nun den Quotienten nach dem von allen Elementen der Form $(v_0, \dots, v_k) - \operatorname{sgn} \pi \cdot (v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(k)})$, wobei $\pi \in S(\{0, \dots, k\})$ eine Permutation ist, erzeugten Untermodul:

$$\tilde{C}_k(\mathcal{S}) := \bigoplus_{(v_0, \dots, v_k) \in \Sigma_k(\mathcal{S})} R /_{(v_0, \dots, v_k) - \operatorname{sgn} \pi \cdot (v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(k)})}.$$

Wir nennen $\tilde{C}_k(\mathcal{S})$ den *k-ten reduzierten orientierten Kettenmodul* von \mathcal{S} . Und Elemente daraus *k-Ketten* (mit Koeffizienten in R). Wir bezeichnen die Klasse von (v_0, \dots, v_k) in $C_k(\mathcal{S})$ mit $[v_0, \dots, v_k]$.

Wir setzen außerdem $C_k(\mathcal{S}) := \tilde{C}_k(\mathcal{S})$ für $k \neq -1$ und $C_{-1}(\mathcal{S}) := 0$. Dies sind die *unreduzierten Kettenmoduln*.

13.2 Bemerkung. Es ist also $[v_0, \dots, v_k] = \operatorname{sgn} \pi \cdot [v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(k)}]$.

13.3 Lemma. Für $k \in \{-1, 0\}$ ist $\tilde{C}_k(\mathcal{S})$ ein freier R -Modul mit Basis $\Sigma_k(\mathcal{S})$.

Für $k > 0$ und $\sigma \in \mathcal{S}$ ein k -Simplex ist $\{[v_0, \dots, v_k] : \{v_0, \dots, v_k\} = \sigma\}$ eine 2-elementige Menge. Die Wahl eines Elementes nennen wir eine Orientierung von σ . Haben wir für jeden k -Simplex eine solche Orientierung gewählt, so bilden diese eine Basis von $C_k(\mathcal{S})$. \square

13.4 Definition und Proposition. Für einen abstrakten Simplicialkomplex \mathcal{S} und $k \geq 0$ ist durch

$$\begin{aligned} \partial_k : \tilde{C}_k(\mathcal{S}) &\rightarrow \tilde{C}_{k-1}(\mathcal{S}) \\ [v_0, \dots, v_k] &\mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k] \end{aligned}$$

eine R -lineare Abbildung definiert. Dabei stehe $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$ für $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k]$, der Hut also für das Weglassen eines Eintrages.

Außerdem definieren wir $\partial_k = 0$ für $k < 0$.

Ebenso definieren wir Abbildungen $\partial_k : C_k(\mathcal{S}) \rightarrow C_{k-1}(\mathcal{S})$, nur dass hier auch $\partial_0 = 0$.

Beweis. Setzen wir $d(v_0, \dots, v_k) := \sum_{i=0}^k (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$. Wir haben zu zeigen, dass $d(v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \operatorname{sign} \pi \cdot d([v_0, \dots, v_k])$ für eine beliebige Permutation π . Da die symmetrische Gruppe von Transpositionen benachbarter Elemente erzeugt wird, genügt es, dies für eine solche nachzurechnen.

Nun ist für $0 \leq r < k$

$$\begin{aligned}
d(v_0, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, v_r, v_{r+2}, \dots, v_k) &= \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, v_r, v_{r+2}, \dots, v_k] \\
&\quad + (-1)^r [v_0, \dots, \hat{v}_{r+1}, \dots, v_k] + (-1)^{r+1} [v_0, \dots, \hat{v}_r, \dots, v_k] \\
&\quad + \sum_{i=r+2}^k (-1)^i [v_0, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, v_r, v_{r+2}, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k] \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{i+1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k] \\
&\quad + (-1)^r [v_0, \dots, \hat{v}_{r+1}, \dots, v_k] + (-1)^{r+1} [v_0, \dots, \hat{v}_r, \dots, v_k] \\
&\quad + \sum_{i=r+2}^k (-1)^{i+1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k] \\
&= - \sum_{i=0}^k [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k] \\
&= -d(v_0, \dots, v_k)
\end{aligned}$$

wie gewünscht. \square

13.5 Proposition. Für die soeben definierten Abbildungen gilt $\mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{d}_{k+1} = 0$.

Beweis. Die trivialen Fälle beiseite lassend berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}_k(\mathfrak{d}_{k+1}[v_0, \dots, v_{k+1}]) &= \mathfrak{d}_k \left(\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}] \right) = \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=i+1}^{k+1} (-1)^{j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1}] \right) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq k+1} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}] + \\
&\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

wie behauptet. \square

13.6 Definition. Es sei R ein Ring. Ein R -Kettenkomplex $D = (D_*, \mathfrak{d}_*)$ ist eine Familie $(D_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von R -Moduln zusammen mit R -linearen Abbildungen $\mathfrak{d}_k: D_k \rightarrow D_{k-1}$, so dass $\mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{d}_{k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Abbildungen \mathfrak{d}_k nennen wir *Randabbildungen*.

13.7 Definition. Es sei D ein R -Kettenkomplex. Wir definieren

$$Z_k(D) = \ker(\mathfrak{d}_k: D_k \rightarrow D_{k-1}),$$

den Modul der k -Zykel und

$$B_k(D) = \operatorname{im}(\mathfrak{d}_{k+1}: D_{k+1} \rightarrow D_k),$$

den Modul der k -Ränder. Da $\mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{d}_{k+1} = 0$, ist $B_k(D) \subset Z_k(D)$, und wir definieren

$$H_k(D) = Z_k(D)/B_k(D),$$

den k -ten *Homologiemodul* von D .

13.8 Definition. Für einen abstrakten Simplicialkomplex \mathcal{S} setzen wir $H_k(\mathcal{S}) := H_k(C_*(\mathcal{S}))$ und $\tilde{H}_k(\mathcal{S}) := H_k(\tilde{C}_*(\mathcal{S}))$. Wollen wir betonen, über welchem Ring R wir arbeiten, so schreiben wir $H_k(\mathcal{S}; R)$ beziehungsweise $\tilde{H}_k(\mathcal{S}; R)$.

$$\tilde{H}_{-1}$$

Wie eingangs gesagt wollen wir, dass die Homologiegruppen homöomorphieinvariant sind. Wir erinnern uns, dass es zwei verschiedene Simplicialkomplexe \mathcal{S} mit $V(\mathcal{S}) = \emptyset$ gibt, nämlich \emptyset und $\{\emptyset\}$. Nun ist $|\emptyset| = \emptyset = |\{\emptyset\}|$, aber $\tilde{H}_{-1}(\emptyset) = 0 \not\cong R \cong \tilde{H}_{-1}(\{\emptyset\})$. Daher vereinbaren wir nun, immer, wenn wir von $\tilde{H}_{-1}(\mathcal{S})$ sprechen, anzunehmen, dass $\mathcal{S} \neq \emptyset$, dass also $\emptyset \in \mathcal{S}$.

13.9 Proposition. *Es sei $\mathcal{S} \neq \emptyset$ ein abstrakter Simplicialkomplex. Dann ist $\tilde{H}_{-1}(\mathcal{S}) = 0$ genau dann, wenn $|\mathcal{S}| \neq \emptyset$. Anderenfalls ist $\tilde{H}_{-1}(\mathcal{S}) = \tilde{H}_{-1}(\{\emptyset\}) \cong R$.*

Beweis. Da $\emptyset \in \mathcal{S}$, ist $\tilde{C}_{-1}(\mathcal{S}) \cong R$, erzeugt von \square . Da $\mathfrak{d}_{-1} = 0$, ist $Z_{-1}(\tilde{C}_*(\mathcal{S})) = \tilde{C}_{-1}(\mathcal{S})$. Ist $|\mathcal{S}| = \emptyset$, also $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$, so ist $\tilde{C}_0(\mathcal{S}) = 0$, also $B_{-1}(\tilde{C}_*(\mathcal{S})) = 0$ und damit $\tilde{H}_{-1}(\mathcal{S}) \cong R/0 \cong R$. Ist $|\mathcal{S}| \neq \emptyset$, so existiert ein $v \in V(\mathcal{S})$. Damit ist $\square = \mathfrak{d}_0([v])$, also ist $B_{-1}(\tilde{C}_*(\mathcal{S})) = Z_{-1}(\tilde{C}_*(\mathcal{S}))$ und damit $\tilde{H}_{-1}(\mathcal{S}) = 0$. \square

Um die Verwirrung komplett zu machen, schreiben wir $\tilde{H}(\emptyset)$ für $\tilde{H}(\{\emptyset\})$, da ja $\emptyset = |\{\emptyset\}|$.

\tilde{H}_0 und H_0

13.10 Proposition. *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex, P die Menge der Zusammenhangskomponenten von $|\mathcal{S}|$. Für jede Komponente $C \in P$ sei eine Ecke $v_C \in V(\mathcal{S})$ gewählt, die in der Komponente C liegt. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \bigoplus_{C \in P} R &\rightarrow H_0(\mathcal{S}) \\ C &\mapsto [[v_C]] \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei die Abbildung $\bigoplus_P R \rightarrow H_0(\mathcal{S})$ mit g bezeichnet. Wir wollen die Umkehrabbildung konstruieren.

Da $Z_0(\mathcal{S}) = Z_0(C_*(\mathcal{S})) = C_0(\mathcal{S})$ die Basis $([v])_{v \in V(\mathcal{S})}$ hat, können wir eine lineare Abbildung $\phi: Z_0 \rightarrow \bigoplus_P R$ dadurch definieren, dass wir $[v]$ auf die Komponente $C(v)$ von v abbilden. Für $[u_0, u_1] \in C_1(\mathcal{S})$ gilt, dass $\phi(\partial[u_0, u_1]) = \phi([u_1]) - \phi([u_0]) = 0$, da u_0 und u_1 in der selben Komponente sind. Die Abbildung ϕ ist also Null auf $B_0(\mathcal{S})$ und induziert daher eine Abbildung $f: H_0(\mathcal{S}) \rightarrow \bigoplus_P R$ durch $f([[v]]) = \phi([v])$.

Es ist $f(g(C)) = \phi([v_C]) = C$, da v_C in C liegt, also ist $f \circ g = \text{id}$. Sei nun $u \in V(\mathcal{S})$. Dann ist $g(f([[u]])) = [[v_{C(u)}]]$. Nun liegen u und $v_{C(u)}$ in der selben Komponente, es gibt also w_0, \dots, w_n mit $w_0 = u$, $w_n = v_{C(u)}$, $\{w_i, w_{i+1}\}$ ein 1-Simplex für alle $0 \leq i < n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \partial_1([w_0, w_1] + [w_1, w_2] + \dots + [w_{n-1}, w_n]) &= \\ &= -[w_0] + [w_1] - [w_1] + [w_2] - \dots - [w_{n-1}] + [w_n] = \\ &= -[u] + [v_{C(u)}]. \end{aligned}$$

Es ist also $-[u] + [v_{C(u)}}$ ein Rand, das heißt $0 = [-[u] + [v_{C(u)}]] = -[[u]] + (g \circ f)([[u]])$. Da die $[[u]]$ den Modul $H_0(\mathcal{S})$ erzeugen, ist $g \circ f = \text{id}$. \square

Nachdem wir H_0 verstanden haben, untersuchen wir den Zusammenhang von H_0 und \tilde{H}_0 .

13.11 Proposition. *Sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex, $v_0 \in V(\mathcal{S})$. Dann ist*

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(\mathcal{S}) \oplus R &\rightarrow H_0(\mathcal{S}) \\ [c] \oplus r &\mapsto [c + r[v_0]] \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei f die obige Abbildung. Wir untersuchen, ob sie wohldefiniert ist. Da jede 0-Kette ein Zykel in dem nicht reduzierten Komplex ist, repräsentiert sie eine Klasse in H_0 . Wir müssen noch überprüfen, dass f unabhängig von der Wahl eines Repräsentanten ist. Sei dazu $d \in C_1(\mathcal{S})$. Dann ist $f([c + \mathfrak{d}d] \oplus r) = [c + \mathfrak{d}d + r[v_0]] = [c + r[v_0]] = f([c] \oplus r)$. Die Abbildung f ist also wohldefiniert. Sie ist auch linear.

Wir definieren

$$g: H_0(\mathcal{S}) \rightarrow \tilde{H}_0(\mathcal{S}) \oplus R$$

$$[c] \mapsto [c - \varepsilon(c)[v_0]] \oplus \varepsilon(c),$$

wobei $\varepsilon: C_0(\mathcal{S}) \rightarrow R$ die durch $\varepsilon([v]) = 1$ definierte lineare Abbildung ist. Um zu sehen, dass sie wohldefiniert ist, prüfen wir, ob $c - \varepsilon(c)[v_0]$ ein reduzierter 0-Zykel ist. Es ist $\mathfrak{d}_0(c - \varepsilon(c)[v_0]) = \varepsilon(c)[\] - \varepsilon(c)[\] = 0$, da $\mathfrak{d}_0(c) = \varepsilon(c)[\]$.

Sei $[c] \in \tilde{H}_0(\mathcal{S})$. Dann ist c ein reduzierter Zykel, also $0 = \mathfrak{d}_0(c) = \varepsilon(c)[\]$, das heißt $\varepsilon(c) = 0$. Damit ist $\varepsilon(f([c] \oplus r)) = \varepsilon([c + r[v_0]]) = r$. Es folgt $(g \circ f)([c] \oplus r) = [c + r[v_0] - r[v_0]] \oplus r = [c] \oplus r$ und $g \circ f = \text{id}$.

$$(f \circ g)[c] = [c - \varepsilon(c)[v_0] + \varepsilon(c)[v_0]] = [c], \text{ also } f \circ g = \text{id}. \quad \square$$

13.12 Korollar. Sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex. Dann ist $|\mathcal{S}|$ genau dann zusammenhängend, wenn $\tilde{H}_0(\mathcal{S}) = 0$. \square

Wir halten noch fest, wie sich die höheren Homologiegruppen für Simplicialkomplexe mit mehreren Komponenten verhalten.

13.13 Proposition. Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex, $(\mathcal{S}_j)_{j \in J}$ eine Familie von Unterkomplexen und $|\mathcal{S}|$ die disjunkte Vereinigung der $|\mathcal{S}_j|$, also $\mathcal{S} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{S}_j$ und $\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_{j'} = \{\emptyset\}$ für $j \neq j'$. Dann ist $H_k(\mathcal{S}) \cong \bigoplus_{j \in J} H_k(\mathcal{S}_j)$ für alle k .

Beweis. Es ist $C_k(\mathcal{S}) \cong \bigoplus_{j \in J} C_k(\mathcal{S}_j)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, und diese Isomorphismen sind mit den Randabbildungen verträglich. Wir sagen in diesem Fall, der Kettenkomplex $C_*(\mathcal{S})$ sei direkte Summe der Kettenkomplexe $C_*(\mathcal{S}_j)$. Man rechnet nun nach, dass Homologie mit solchen direkten Summen von Kettenkomplexen vertauscht. \square

H_1

Wir wollen nun eine Beschreibung von $H_1(\mathcal{S})$ erhalten. Wegen Proposition 13.13 können wir uns auf den Fall beschränken, dass $|\mathcal{S}|$ zusammenhängend ist. In diesem Fall werden wir sehen, dass $H_1(\mathcal{S})$ von $\pi_1(|\mathcal{S}|)$ bestimmt wird. Dieses Resultat werden wir erhalten, indem wir für $H_1(\mathcal{S})$ eine ähnliche Beschreibung wie die von $\pi_1(|\mathcal{S}|)$ in Satz 12.21 beweisen.

Wir nehmen daher wie dort an, dass $|\mathcal{S}|$ zusammenhängend ist, $v_0 \in V(\mathcal{S})$ und wir einen aufspannenden Baum $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ gewählt haben. Und wieder

wählen wir für jedes $u \in V(\mathcal{T}) = V(\mathcal{S})$ einen Weg von v_0 nach u , dieses Mal in Form von einer 1-Kette: Es gibt eindeutig bestimmte $n \geq 0$ und $w_i \in V(\mathcal{T})$, $0 \leq i \leq n$, mit $v_0 = w_0$, $u = w_n$, $\{w_r, w_{r+1}\} \in \mathcal{T}$ und $w_r \neq w_{r'}$ für $0 \leq r < r' \leq n$. Mit diesen setzen wir

$$K([u]) := \sum_{0 \leq r < n} [w_r, w_{r+1}]$$

und setzen dies zu einer linearen Abbildung $K: C_0(\mathcal{T}) \rightarrow C_1(\mathcal{T})$ fort. Zunächst stellen wir

$$\partial(K[u]) = \sum_{0 \leq r < n} (-[w_r] + [w_{r+1}]) = -[w_0] + [w_n] = -[v_0] + [u]$$

fest. Außerdem ist für einen 1-Simplex $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$ entweder $K[u_1] = K[u_0] + [u_0, u_1]$ oder $K[u_0] = K[u_1] + [u_1, u_0]$. Beide Gleichungen sind aber wegen $[u_1, u_0] = -[u_0, u_1]$ äquivalent, und aufgrund der Linearität folgt

$$c = K(\partial c) \quad \text{für alle } c \in C_1(\mathcal{T}).$$

Der Schleife bei v_0 durch den Simplex $\{u_0, u_1\}$, die das Element g_{u_0, u_1} in Satz 12.21 repräsentierte, entspricht nun $K([u_0]) + [u_0, u_1] - K([u_1]) = [u_0, u_1] - K(\partial[u_0, u_1])$.

13.14 Proposition. *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex und $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ ein aufspannender Baum. Ist $K: C_0(\mathcal{S}) \rightarrow C_1(\mathcal{S})$ wie oben definiert, so gilt für die lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \gamma: C_1(\mathcal{S}) &\rightarrow C_1(\mathcal{S}) \\ c &\mapsto c - K(\partial c), \end{aligned}$$

dass im $\gamma = Z_1(\mathcal{S})$ und $\ker \gamma = C_1(\mathcal{T})$, wobei wir $C_1(\mathcal{T})$ als Untermodul von $C_1(\mathcal{S})$ auffassen.

Beweis. Ist $c \in Z_1(\mathcal{S})$, dann ist $\gamma c = c - K(\partial c) = c - K0 = c$. Damit ist $Z_1(\mathcal{S}) \subset \text{im } \gamma$. Dass auch $\text{im } \gamma \subset Z_1(\mathcal{S})$, rechnen wir auf einer Basis nach:

$$\begin{aligned} \partial(\gamma([u_0, u_1])) &= \partial[u_0, u_1] - \partial(K(\partial[u_0, u_1])) = \\ &= \partial[u_0, u_1] - \partial(K(-[u_0] + [u_1])) = \partial[u_0, u_1] + \partial(K[u_0]) - \partial(K[u_1]) = \\ &= \partial[u_0, u_1] - [v_0] + [u_0] + [v_0] - [u_1] = 0. \end{aligned}$$

Das zeigt $\text{im } \gamma = Z_1(\mathcal{S})$.

Außerdem ist $C_1(\mathcal{T}) \subset \ker \gamma$, denn wir haben oben schon bemerkt, dass $K(\partial_1 c) = c$ für $c \in C_1(\mathcal{T})$. Andererseits ist für $c - \gamma(c) = K(\partial c) \subset C_1(\mathcal{T})$. Ist also $\gamma(c) = 0$, so ist $c \in C_1(\mathcal{T})$. Das zeigt $\ker \gamma = C_1(\mathcal{T})$. \square

Nun haben wir schon eine Darstellung von H_1 , die analog zur Darstellung von π_1 in Satz 12.21 ist. Wir erinnern daran, dass nach Definition $H_1(\mathcal{S}) = Z_1(\mathcal{S})/B_1(\mathcal{S})$.

13.15 Proposition. *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex und $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ ein aufspannender Baum. Es sei γ wie in Proposition 13.14. Auf $V(\mathcal{S})$ sei eine totale Ordnung definiert. Dann ist*

$$(\gamma([u_0, u_1]))_{\substack{\{u_0, u_1\} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T} \\ u_0 < u_1}}$$

eine Basis von $Z_1(\mathcal{S})$ und für $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{T}$ ist $\gamma([u_0, u_1]) = 0$. Außerdem ist die Menge

$$\{\gamma([u_0, u_1]) + \gamma([u_1, u_2]) - \gamma([u_0, u_2]) : \{u_0, u_1, u_2\} \in \mathcal{S}, u_0 < u_1 < u_2\}$$

ein Erzeugendensystem des Untermoduls $B_1(\mathcal{S}) \subset Z_1(\mathcal{S})$.

Beweis. Wir haben in Proposition 13.14 gesehen, dass γ einen Isomorphismus $C_1(\mathcal{S})/C_1(\mathcal{T}) \rightarrow Z_1(\mathcal{S})$ induziert, und

$$([u_0, u_1] + C_1(\mathcal{T}))_{\substack{\{u_0, u_1\} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T} \\ u_0 < u_1}}$$

ist eine Basis von $C_1(\mathcal{S})/C_1(\mathcal{T})$. Dies zeigt den ersten Teil.

Da

$$([u_0, u_1, u_2])_{\substack{\{u_0, u_1, u_2\} \in \mathcal{S} \\ u_0 < u_1 < u_2}}$$

eine Basis von $C_2(\mathcal{S})$ ist, erzeugen die $\mathfrak{d}_2([u_0, u_1, u_2])$ mit $u_0 < u_1 < u_2$ den Modul $B_1(\mathcal{S}) = \text{im } \mathfrak{d}_2$. Da aber $\gamma c = c$ für alle $c \in Z_1(\mathcal{S})$, ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_2([u_0, u_1, u_2]) &= \gamma(\mathfrak{d}_2([u_0, u_1, u_2])) = \gamma([u_1, u_2] - [u_0, u_2] + [u_0, u_1]) = \\ &= \gamma([u_0, u_1]) + \gamma([u_1, u_2]) - \gamma([u_0, u_2]). \end{aligned}$$

Dies zeigt den zweiten Teil. \square

Dies ist völlig analog zu Satz 12.21, nur, für $R = \mathbb{Z}$, mit abelschen Gruppen an Stelle von Gruppen. Daher ist $H_1(\mathcal{S})$ in diesem Fall die Abelianisierung von $\pi_1(\mathcal{S})$.

13.16 Satz (Der kleine Hurewicz). *Es sei \mathcal{S} ein endlicher abstrakter Simplicialkomplex und $|\mathcal{S}|$ zusammenhängend und nicht-leer. Es sei $v_0 \in V(\mathcal{S})$.*

Dann sind $H_1(\mathcal{S}; \mathbb{Z})$ und die Abelianisierung von $\pi_1(|\mathcal{S}|, v_0)$ isomorph,

$$H_1(\mathcal{S}; \mathbb{Z}) \cong \pi_1(|\mathcal{S}|) / [\pi_1(|\mathcal{S}|), \pi_1(|\mathcal{S}|)].$$

Genauer: Ist ein aufspannender Baum \mathcal{T} gewählt, so ist mit der Notation aus Satz 12.21 und Proposition 13.14 die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi: \pi_1(|\mathcal{S}|, v_0) &\rightarrow H_1(\mathcal{S}) \\ j_{\#}(g_{u_0, u_1}) &\mapsto [\gamma([u_0, u_1])] \end{aligned}$$

eine Abelianisierungshomomorphismus.

13.17 Bemerkung. Der Homomorphismus hängt nicht von der Wahl von T ab. Das ist nicht schwer zu zeigen, doch wir verzichten hier darauf, da es sich von selbst ergibt, wenn man die Homologietheorie weiter ausgebaut hat.

Beweis. Wir benutzen die Notation aus Satz 12.21 und Proposition 13.14.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|, v_0) & \xrightarrow{j_{\#}} & \pi_1(|\mathcal{S}|, v_0) \\
 \downarrow \tilde{\phi} & & \downarrow \phi \\
 Z_1(\mathcal{S}) & \xrightarrow[p_{c \rightarrow [c]}]{} & H_1(\mathcal{S})
 \end{array}$$

Da $\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|, v_0)$ frei von den Elementen g_{u_0, u_1} , $u_0 < u_1$, $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{S}$ erzeugt wird, definiert $g_{u_0, u_1} \mapsto \gamma([u_0, u_1])$ eine Gruppenhomomorphismus $\tilde{\phi}$. Da die Bilder $\gamma([u_0, u_1])$ eine Basis der abelschen Gruppe $Z_1(\mathcal{S})$ bilden, ist $\tilde{\phi}$ ein Abelisierungshomomorphismus, das heißt er ist surjektiv, und sein Kern ist $[\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|, v_0), \pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|, v_0)]$, die Untergruppe (sie ist ein Normalteiler), die von den Elementen der Form $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in [\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|, v_0)]$ erzeugt wird. Diesen Teil lassen wir als Übung, wir erinnern aber an den Spezialfall $\langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, der bei der Berechnung der Fundamentalgruppe des Torus mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen vorkommt.

Nach Proposition 13.15 ist der Kern des Epimorphismus $p: Z_1(\mathcal{S}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathcal{S}; \mathbb{Z})$ von den Elementen

$$\gamma([u_0, u_1]) + \gamma([u_1, u_2]) - \gamma([u_0, u_2]) = \tilde{\phi}(g_{u_0, u_1}g_{u_1, u_2}g_{u_0, u_2}^{-1})$$

erzeugt. Es folgt, dass $\ker(p \circ \tilde{\phi})$ der kleinste Normalteiler ist, der die Elemente $g_{u_0, u_1}g_{u_1, u_2}g_{u_0, u_2}^{-1}$ und die Kommutatoruntergruppe $[\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|), \pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|)]$ erhält. Nun ist nach Satz 12.21 $j_{\#}$ ein Epimorphismus, dessen Kern der kleinste Normalteiler ist, der alle $g_{u_0, u_1}g_{u_1, u_2}g_{u_0, u_2}^{-1}$ enthält. Da diese auch in $\ker(p \circ \tilde{\phi})$ enthalten sind, existiert der Homomorphismus ϕ mit $\phi \circ j_{\#} = p \circ \tilde{\phi}$. Da $p \circ \tilde{\phi}$ surjektiv ist, ist ϕ surjektiv. Der Kern von ϕ ist der kleinste Normalteiler, der $j_{\#}([\pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|), \pi_1(|\mathcal{S}^{(1)}|)])$ enthält. Da $j_{\#}$ surjektiv ist, ist dies $[\pi_1(|\mathcal{S}|), \pi_1(|\mathcal{S}|)]$. Das beweist die Behauptung. \square

Abschnitt 14

Homologie II: Abbildungen

Die Homologie eines Simplex

Wir wollen für $n \geq -1$ mit Δ^n auch den abstrakten Simplizialkomplex $\mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$ bezeichnen und setzen $\partial\Delta^n := \Delta^n \setminus \{0, \dots, n\}$. Wie bereits bemerkt ist $|\Delta^n| \approx \Delta^n \approx D^n$ und $|\partial\Delta^n| \approx \partial\Delta^n \approx \mathbb{S}^{n-1}$.

Da Δ^n für $n \geq 0$ zusammenziehbar ist und die $\tilde{H}_r(\{\emptyset, \{0\}\}) = \tilde{H}_r(\Delta^0) = 0$ für alle r (Nachrechnen!), erwarten wir $\tilde{H}_r(\Delta^n) = 0$ für alle r . Dies ist unser erstes Resultat.

14.1 Proposition. *Sei \mathcal{S} ein Simplizialkomplex und sei $v \in V(\mathcal{S})$, so dass $\sigma \cup \{v\} \in \mathcal{S}$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$. (Wir sagen, \mathcal{S} sei ein Kegel mit Spitze v .) Dann ist $\tilde{H}_r(\mathcal{S}) = 0$ für alle r .*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jeder r -Zykel Rand einer $(r+1)$ -Kette ist. Dazu definieren wir für alle $r \geq -1$ eine lineare Abbildung

$$K_r: \tilde{C}_r(\mathcal{S}) \rightarrow \tilde{C}_{r+1},$$

$$[u_0, \dots, u_r] \mapsto \begin{cases} [v, u_0, \dots, u_r], & v \notin \{u_0, \dots, u_r\}, \\ 0, & v \in \{u_0, \dots, u_r\}. \end{cases}$$

Diese ist wohldefiniert, da die Definition mit Permutationen verträglich ist.

Wir setzen außerdem $K_r = 0$ für $r < -1$.

Dann gilt für alle $r \in \mathbb{Z}$, dass

$$\partial_{r+1}K_r + K_{r-1}\partial_r = \text{id}_{\tilde{C}_r(\mathcal{S})}.$$

In der Tat haben wir für $r \geq 0$ und $v \notin \{u_0, \dots, u_r\}$

$$\begin{aligned} \partial K[u_0, \dots, u_r] &= \partial[v, u_0, \dots, u_r] \\ &= [u_0, \dots, u_r] + \sum_{i=0}^r (-1)^{i+1} [v, u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_r] \\ &= [u_0, \dots, u_r] - K\partial[u_0, \dots, u_r]. \end{aligned}$$

und für $v = u_j$

$$\begin{aligned}
K\partial[u_0, \dots, u_r] &= K\partial[u_0, \dots, u_{j-1}, v, u_{j+1}, \dots, u_r] \\
&= (-1)^j K[u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_r] \\
&= (-1)^j [v, u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_r] \\
&= [u_0, \dots, u_{j-1}, v, u_{j+1}, \dots, u_r] \\
&= [u_0, \dots, u_r] - \partial K[u_0, \dots, u_r]
\end{aligned}$$

und schließlich für $r = -1$

$$\partial K[\] = \partial[v] = [\] = [\] - K\partial[\].$$

Man mache sich klar, dass obige Rechnung auch für $r = 0$ korrekt war, und wo sie für $C(\mathcal{S})$ an Stelle von $\tilde{C}(\mathcal{S})$ falsch gewesen wäre, beziehungsweise, was dort das Ergebnis gewesen wäre.

Ist also $[c] \in \tilde{H}_r(\mathcal{S})$, das heißt $c \in \tilde{C}_r(\mathcal{S})$ und $\partial c = 0$, so ist $c = \partial_{r+1}(K_r(c)) + K_{r-1}(\partial_r(c)) = \partial_{r+1}(K_r(c))$ ein Rand, also $[c] = 0$. \square

14.2 Korollar. $\tilde{H}_r(\Delta^n) = 0$ für $n \geq 0$, $r \in \mathbb{Z}$. \square

14.3 Proposition. Für $n \geq 0$ ist

$$\tilde{H}_k(\partial\Delta^n) \cong \begin{cases} 0, & k \neq n-1, \\ R, & k = n-1, \end{cases}$$

wobei $\tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n)$ von $[\partial_n[0, \dots, n]]$ erzeugt wird.

Beweis. Für $k < n-1$ ist $\tilde{H}_k(\partial\Delta^n) = \tilde{H}_k(\Delta^n) = 0$, für $k > n-1$ ist $\tilde{C}_k(\partial\Delta^n) = 0$, also $\tilde{H}_k(\partial\Delta^n) = 0$.

Da $\tilde{C}_{n+1}(\Delta^n) = 0$, ist $\tilde{H}_n(\Delta^n) = \ker \partial_n^{\tilde{C}(\Delta^n)}$. Da $\tilde{H}_n(\Delta^n) = 0$, ist also $\partial_n^{\tilde{C}(\Delta^n)}$ injektiv. Da $\tilde{H}_{n-1}(\Delta^n) = 0$, ist $\ker \partial_{n-1}^{\tilde{C}(\Delta^n)} = \text{im } \partial_n^{\tilde{C}(\Delta^n)}$.

Da $\tilde{C}_n(\partial\Delta^n) = 0$, ist $\tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n) = \ker \partial_{n-1}^{\tilde{C}(\partial\Delta^n)}$. Nun ist $\ker \partial_{n-1}^{\tilde{C}(\partial\Delta^n)} = \ker \partial_{n-1}^{\tilde{C}(\Delta^n)}$, also nach dem vorhergehenden $\partial_n: \tilde{C}_n(\Delta^n) \rightarrow \tilde{Z}_{n-1}(\partial\Delta^n) = \tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n)$ ein Isomorphismus. \square

Simpliziale Abbildungen und Kettenabbildungen

Bei der Betrachtung der Fundamentalgruppe war es wesentlich, dass eine stetige Abbildung zwischen Räumen einen Gruppenhomomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen induziert. Da wir Homologie für Simplicialkomplexe definiert haben, betrachten wir eine geeignete Klasse von Abbildungen zwischen ihnen.

Simpliziale Abbildungen

14.4 Definition. Es seien \mathcal{S}, \mathcal{T} abstrakte Simplicialkomplexe. Eine *simpliziale Abbildung* $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ ist eine Funktion $f: V(\mathcal{S}) \rightarrow V(\mathcal{T})$ mit $f[\sigma] \in \mathcal{T}$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}$.

Wir werden zuerst beschreiben, wie eine simpliziale Abbildung zwischen Simplicialkomplexen eine stetige Abbildung zwischen den Realisierungen induziert.

Definieren wir, etwas allgemeiner als oben, für eine endliche Menge σ und $v \in \sigma$ den Punkt $e_v \in \Delta^\sigma$ durch

$$(e_v)_u := \begin{cases} 1, & u = v, \\ 0, & u \neq v, \end{cases}$$

so hat jeder Punkt $x \in \Delta^\sigma$ eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{v \in \sigma} \lambda_v e_v$, und es ist $\sum_v \lambda_v = 1$ und $\lambda_v \geq 0$ für alle $v \in \sigma$. (Selbstverständlich ist $\lambda_v = x_v$.) Sind nun $y_v \in Y$, $v \in \sigma$, Punkte in einer konvexen Teilmenge Y eines euklidischen Raumes (zum Beispiel kann Y ein anderer Simplex sein), so definiert dies eine stetige Abbildung

$$\begin{array}{c} \Delta^\sigma \rightarrow Y \\ \sum_{v \in \sigma} \lambda_v e_v \mapsto \sum_{v \in \sigma} \lambda_v y_v \end{array}$$

Aus solchen Abbildungen werden wir Abbildungen zwischen triangulierten Räumen zusammensetzen.

14.5 Definition und Proposition. Es seien \mathcal{S}, \mathcal{T} abstrakte Simplicialkomplexe und $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ eine simpliziale Abbildung. Dann wird eine stetige Abbildung $|f|: |\mathcal{S}| \rightarrow |\mathcal{T}|$ dadurch definiert, dass

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{S}| & \xrightarrow{|f|} & |\mathcal{T}| \\ \uparrow \chi_\sigma^{\mathcal{S}} & & \chi_{f[\sigma]}^{\mathcal{T}} \uparrow \\ \Delta^\sigma & \xrightarrow{\sum_{v \in \sigma} \lambda_v e_v \mapsto \sum_{v \in \sigma} \lambda_v e_{f(v)}} & \Delta^{f[\sigma]} \end{array}$$

für alle $\sigma \in \mathcal{S}$ kommutiert.

Dies verallgemeinert die Konstruktion aus Proposition 12.7, wo f eine Inklusionsabbildung war.

Beweis. Die Abbildung ist eindeutig definiert, da $|\mathcal{S}| = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{im } \chi_\sigma$. Sie ist

wohldefiniert, da für $\tau \subset \sigma \in \mathcal{S}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^\sigma & \xrightarrow{\sum_{v \in \sigma} \lambda_v e_v \mapsto \sum_{v \in \sigma} \lambda_v e_{f(v)}} & \Delta^{f[\sigma]} \xrightarrow{\chi_{f[\sigma]}^\mathcal{T}} |\mathcal{T}| \\
 \uparrow i_\tau^\sigma & & \uparrow i_{f[\tau]}^{f[\sigma]} \\
 \Delta^\tau & \xrightarrow{\sum_{v \in \tau} \lambda_v e_v \mapsto \sum_{v \in \tau} \lambda_v e_{f(v)}} & \Delta^{f[\tau]} \xrightarrow{\chi_{f[\tau]}^\mathcal{T}} |\mathcal{T}|
 \end{array} \quad (14.1)$$

kommutiert. Sie ist stetig, da alle Kompositionen $|f| \circ \chi_\sigma$ für $\sigma \in \mathcal{S}$ stetig sind. \square

14.6 Proposition. *Es seien $\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{K}$ abstrakte Simplizialkomplexe und $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}, g: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{K}$ simpliziale Abbildungen. Dann gilt:*

- (i) $\text{id}_{V(\mathcal{S})} =: \text{id}_\mathcal{S}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ist eine simpliziale Abbildung.
- (ii) $g \circ f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{K}$ ist eine simpliziale Abbildung.
- (iii) $|g \circ f| = |g| \circ |f|$.

\square

Kettenabbildungen

Wir werden beschreiben, wie eine simpliziale Abbildung lineare Abbildungen zwischen den Homologiegruppen induziert. In einem Zwischenschritt werden wir eine Abbildung zwischen den simplizialen Kettenkomplexen definieren. Die entsprechende Art von Abbildungen definieren wir nun

14.7 Definition. Es seien C, D R -Kettenkomplexe. Eine *Kettenabbildung* $f: C \rightarrow D$ ist ein System von R -linearen Abbildungen $(f_i: C_i \rightarrow D_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, so dass

$$\begin{array}{ccc}
 C_i & \xrightarrow{f_i} & D_i \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 C_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & D_{i-1}
 \end{array}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ kommutiert.

14.8 Definition und Proposition. *Ist $f: C \rightarrow D$ eine Kettenabbildung, so definiert*

$$\begin{aligned}
 H_i(f): H_i(C) &\rightarrow H_i(D) \\
 [c] &\mapsto [f_i(c)]
 \end{aligned}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ eine R -lineare Abbildung.

Beweis. Wir müssen nur sicherstellen, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Sei $c \in C_i$ ein Zykel, also $\partial c = 0$. Dann ist $\partial_i(f_i c) = f_{i-1}(\partial_i c) = f_{i-1}(0) = 0$, also ist $f_i(c)$ ein Zykel und repräsentiert ein Element von $H_i(D)$.

Sei $c' \in C_i$ ein weiterer Zykel, $[c'] = [c]$. Dann existiert ein $d \in C_{i+1}$, so dass $c' = c + \partial_{i+1} d$. Es ist dann $f_i(c') = f_i(c) + f_i(\partial_{i+1} d) = f_i(c) + \partial_{i+1}(f_{i+1}(d))$, also $[f_i(c')] = [f_i(c)]$. \square

14.9 Definition und Proposition. *Es sei $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ eine simpliziale Abbildung. Dann definiert*

$$\begin{aligned} \tilde{C}_k(f): \tilde{C}_k(\mathcal{S}) &\rightarrow \tilde{C}_k(\mathcal{T}) \\ [u_0, \dots, u_k] &\mapsto \begin{cases} [f(u_0), \dots, f(u_k)], & \#\{f(u_0), \dots, f(u_k)\} = k+1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

eine Kettenabbildung $\tilde{C}(f): \tilde{C}(\mathcal{S}) \rightarrow \tilde{C}(\mathcal{T})$ und damit lineare Abbildungen $\tilde{H}(f) := H_k(\tilde{C}(f)): \tilde{H}_k(\mathcal{S}) \rightarrow \tilde{H}_k(\mathcal{T})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Ebenso definieren wir $C(f): C(\mathcal{S}) \rightarrow C(\mathcal{T})$, $H(f): H(\mathcal{S}) \rightarrow H(\mathcal{T})$.

Beweis. Wir wollen nachrechnen, dass $\tilde{C}(f)$ eine Kettenabbildung ist. Wir haben für $\#\{f(u_0), \dots, f(u_k)\} = k+1$, dass

$$\begin{aligned} f_{k-1}(\partial_k[u_0, \dots, u_k]) &= f_{k-1} \left(\sum_i (-1)^i [u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k] \right) \\ &= \sum_i (-1)^i [f(u_0), \dots, \widehat{f(u_i)}, \dots, f(u_k)] \\ &= \partial_k(f_k([u_0, \dots, u_k])). \end{aligned}$$

Ist $\#\{f(u_0), \dots, f(u_k)\} < k$, so ist offensichtlich

$$f_{k-1}(\partial_k[u_0, \dots, u_k]) = 0 = \partial_k(f_k[u_0, \dots, u_k]).$$

Ist $\#\{f(u_0), \dots, f(u_k)\} = k$, so gibt es $j < j'$ mit $f(u_j) = f(u_{j'}) = v$, und für diese erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{k-1}(\partial_k[u_0, \dots, u_k]) &= \\ &= f_{k-1} \left((-1)^j [u_0, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_k] + (-1)^{j'} [u_0, \dots, \hat{u}_{j'}, \dots, u_k] \right) \\ &= (-1)^j [f(u_0), \dots, f(u_{j-1}), f(u_{j+1}), \dots, f(u_{j'-1}), v, f(u_{j'+1}), \dots, f(u_k)] \\ &\quad + (-1)^{j'} [f(u_0), \dots, f(u_{j-1}), v, f(u_{j+1}), \dots, f(u_{j'-1}), f(u_{j'+1}), \dots, f(u_k)] \\ &= 0 = \partial_{k-1}(f_k[u_0, \dots, u_k]), \end{aligned}$$

da die beiden Summanden durch $j' - j - 1$ Transpositionen ineinander überführt werden, und $(-1)^j (-1)^{j'-j-1} = -(-1)^{j'}$, so dass sie sich wegheben. \square

Topologische Invarianz

Homologie wird erst durch folgendes Resultat, das zu beweisen wir leider nicht mehr die Zeit haben, wirklich nützlich.

14.10 Satz. *Es ist möglich, derart jeder stetigen Abbildung $f: |\mathcal{S}| \rightarrow |\mathcal{T}|$ zwischen Realisierungen von abstrakten Simplicialkomplexen eine Familie von linearen Abbildungen $H_r(f): H_r(\mathcal{S}) \rightarrow H_r(\mathcal{T})$ zuzuordnen, so dass folgendes gilt.*

- (i) $H_r(f \circ g) = H_r(f) \circ H_r(g)$.
- (ii) Ist $\phi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ eine simpliciale Abbildung und $f = |\phi|: |\mathcal{S}| \rightarrow |\mathcal{T}|$, so ist $H_r(f) = H_r(\phi)$.

Das selbe gilt für reduzierte Homologie.

Wir nehmen dieses Resultat nun als gegeben hin.

14.11 Korollar. *Ist $f: |\mathcal{S}| \xrightarrow{\cong} |\mathcal{T}|$ ein Homöomorphismus, so ist*

$$H_r(f): H_r(\mathcal{S}) \xrightarrow{\cong} H_r(\mathcal{T})$$

ein Isomorphismus.

14.12 Proposition. \mathbb{S}^{n-1} ist kein Retrakt von D^n .

Beweis. Wir gehen wie bei Proposition 9.11, dem Fall $n = 2$, vor, nur dass wir Homologie an Stelle der Fundamentalgruppe benutzen.

Wir ersetzen das Paar (D^n, \mathbb{S}^{n-1}) durch das homöomorphe Paar $(|\Delta^n|, |\partial\Delta^n|)$, das heißt, wir benutzen diese Triangulierung des n -Balls. Sei $i: |\partial\Delta^n| \rightarrow |\Delta^n|$ die Inklusionsabbildung, und $r: |\Delta^n| \rightarrow |\partial\Delta^n|$ eine Retraktionsabbildung, also $r \circ i = \text{id}$. Das heißt, dass das Diagramm von Räumen

$$\begin{array}{ccc} |\partial\Delta^n| & \xrightarrow{i} & |\Delta^n| \\ & \searrow \text{id}_{|\partial\Delta^n|} & \downarrow r \\ & & |\partial\Delta^n| \end{array}$$

kommutiert. Mit Satz 14.10 erhalten wir daraus für $k \in \mathbb{Z}$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_k(\partial\Delta^n) & \xrightarrow{\tilde{H}_k(i)} & \tilde{H}_k(\Delta^n) \\ & \searrow \text{id}_{\tilde{H}_k(\partial\Delta^n)} & \downarrow \tilde{H}_k(r) \\ & & \tilde{H}_k(\partial\Delta^n). \end{array}$$

Da $\tilde{H}_k(D^n) = 0$, ist die Komposition $\tilde{H}_k(r) \circ \tilde{H}_k(i) = \text{id}_{\tilde{H}_k(\partial\Delta^n)}$ trivial. Für $k = n - 1$ ergibt sich ein Widerspruch zu $\tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n) \cong \mathbb{R}$. \square

14.13 Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz). Für $n \geq 0$ hat jede stetige Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ einen Fixpunkt.

Beweis. Wie für Satz 9.12, den Fall $n = 2$. □

Kettenhomotopien

Wir betrachten nun das algebraische Analogon zur Homotopie zwischen stetigen Abbildungen. Wir beginnen mit Kettenabbildungen, die in diesem Sinne homotop zur Nullabbildung sind.

14.14 Proposition. Es seien C, D Kettenkomplexe und $(K_r)_{r \in \mathbb{Z}}$ eine Familie linearer Abbildungen $K_r: C_r \rightarrow D_{r+1}$. Wir setzen $f_r := \partial_{r+1}K_r + K_{r-1}\partial_r$. Dann ist $f: C \rightarrow D$ eine Kettenabbildung und $H_r(f) = 0$ für alle r .

Beweis. Um zu sehen, dass f eine Kettenabbildung ist, berechnen wir

$$\begin{aligned} f_{r-1}\partial_r &= (\partial_r K_{r-1} + K_{r-2}\partial_{r-1})\partial_r = \partial_r K_{r-1}\partial_r + K_{r-2}0 = \partial_r K_{r-1}\partial_r, \\ \partial_r f_r &= \partial_r(\partial_{r+1}K_r + K_{r-1}\partial_r) = 0K_r + \partial_r K_{r-1}\partial_r = \partial_r K_{r-1}\partial_r. \end{aligned}$$

Sei nun $[c] \in H_r(C)$. Dann ist

$$H_r(f)([c]) = [f_r(c)] = [\partial_{r+1}K_r c + K_{r-1}\partial_r c] = [\partial_{r+1}K_r c] = 0,$$

da $\partial c = 0$ und jeder Rand eine triviale Homologiekategorie repräsentiert. □

14.15 Beispiel. Bei der Berechnung der reduzierten Homologie eines Kegels \mathcal{S} in Proposition 14.1 haben wir Abbildungen $K_r: \tilde{C}_r(\mathcal{S}) \rightarrow \tilde{C}_{r+1}$ produziert, so dass $\text{id}_{\tilde{C}(\mathcal{S})} = \partial K + K\partial$. Es folgte, dass $\text{id}_{\tilde{H}_r(\mathcal{S})} = H_r(\text{id}_{\tilde{C}(\mathcal{S})}) = 0$, also $\tilde{H}_r(\mathcal{S}) = 0$.

Kettenabbildungen von C nach D bilden einen R -Modul. Wir haben gerade einen Untermodul von Kettenabbildungen betrachtet, die wir als äquivalent zur Nullabbildung betrachten wollen. Damit ist nun klar, wann wir zwei Kettenabbildungen als äquivalent betrachten werden.

14.16 Definition. Es seien $f, g: C \rightarrow D$ Kettenabbildungen. Dann ist $f \simeq g$ genau dann, wenn Abbildungen $K_r: C_r \rightarrow D_{r+1}$ existieren, so dass $\partial K + K\partial = g - f$. In diesem Fall heiße K eine *Kettenhomotopie von f nach g* und f und g heißen *kettenhomotop*.

Kettenkomplexe C, D heißen *kettenhomotopieäquivalent*, $C \simeq D$, wenn Kettenabbildungen $f: C \rightarrow D, g: D \rightarrow C$ mit $f \circ g \simeq \text{id}_D, g \circ f \simeq \text{id}_C$ existieren. In diesem Fall heißt f eine *Kettenhomotopieäquivalenz*.

14.17 Proposition. Kettenhomotopie und Kettenhomotopieäquivalenz sind Äquivalenzrelationen. Ist $f: C \rightarrow D$ eine Kettenhomotopieäquivalenz, so ist $H_r(f): H_r(C) \rightarrow H_r(D)$ für alle r ein Isomorphismus.

Beweis. Zur Transitivität der Kettenhomotopie bemerken wir, dass, wenn K eine Kettenhomotopie von f nach g ist und K' eine von g nach h , ihre Summe $K + K'$ eine Kettenhomotopie von f nach h ist.

Um zu sehen, dass Kettenhomotopieäquivalenz reflexiv ist, zeigen wir, dass für homotope Kettenabbildungen $f, f': C \rightarrow D$ und $h, h': D \rightarrow E$ auch $h \circ f \simeq h' \circ f'$ gilt. Dazu sei $f' - f = \partial K + K\partial$ und $h' - h = \partial K' + K'\partial$. Wir setzen $K'' = hK + K'f'$. Dann ist

$$\begin{aligned} \partial K'' + K''\partial &= \partial hK + \partial K'f' + hK\partial + K'f'\partial \\ &= h\partial K + hK\partial + \partial K'f' + K'\partial f' \\ &= h(\partial K + K\partial) + (\partial K' + K'\partial)f' \\ &= h(f' - f) + (h' - h)f' = h'f' - hf. \end{aligned}$$

Der Rest folgt dann rein formal wie für Homotopieäquivalenz von Räumen.

Schließlich sei $f \simeq g: C \rightarrow D$. Wir haben in Proposition 14.14 gesehen, dass dann $H_r(g - f) = 0$. Nun ist H_r aber additiv, also ist $H_r(g) - H_r(f) = H_r(g - f) = 0$. \square

14.18 Beispiel. Es set \mathcal{T} ein Baum und $v_0 \in V(\mathcal{T})$. Es sei $c: \mathcal{T} \rightarrow \Delta^0$ die simpliziale Abbildung $c(u) := 0$ und $j: \Delta^0 \rightarrow \mathcal{T}$ die simpliziale Abbildung $j(0) := v_0$. Es ist offenbar $c \circ j = \text{id}_{\Delta^0}$.

Bei der Beschreibung von H_1 hatten wir für einen Baum \mathcal{T} vor Proposition 13.14 eine Abbildung $K: C_0(\mathcal{T}) \rightarrow C_1(\mathcal{T})$ definiert. Nennen wir diese nun K_0 und setzen wir $K_r := 0: C_r(\mathcal{T}) \rightarrow C_{r+1}(\mathcal{T})$ für $r \neq 0$. Wir haben dort

$$\partial_1 K_0 + K_{-1}\partial_0 = \partial_1 K_0 = -C_0(j \circ c) + \text{id}_{C_0(\mathcal{T})}$$

und

$$\partial_2 K_1 + K_0\partial_1 = K_0\partial_1 = \text{id}_{C_1(\mathcal{T})}$$

berechnet, insgesamt also (da $C_0(j \circ c) = 0$)

$$\partial K + K\partial = -C(j \circ c) + \text{id}_{C(\mathcal{T})}$$

und damit

$$C(j) \circ C(c) = C(j \circ c) \simeq \text{id}_{C(\mathcal{T})}.$$

Es ist also $C(c): C(\Delta^0) \rightarrow C(\mathcal{T})$ eine Kettenhomotopieäquivalenz und $H_k(c): H_k(\Delta^0) \rightarrow H_k(\mathcal{T})$ ein Isomorphismus für alle k und insbesondere $H_0(\mathcal{T}) \cong \mathbb{R}$ und $H_k(\mathcal{T}) = 0$ für $k \neq 0$. Den nicht trivialen Fall $k = 1$ haben wir so ähnlich schon in Proposition 13.14 (und danach) gezeigt.

Abschnitt 15

Homologie III: Homotopieinvarianz, Eulercharakteristik und lange exakte Sequenzen

Homotopieinvarianz

Wir wollen die Homotopieinvarianz der Homologiegruppen zeigen. Da eine Homotopie zwischen zwei Abbildungen von $|\mathcal{S}|$ in einen anderen Raum eine Abbildung von $|\mathcal{S}| \times I$ in diesen Raum ist, wollen wir zunächst $|\mathcal{S}| \times I$ triangulieren. Wir könnten allgemeiner Produkte von Simplicialkomplexen betrachten, aber wir belassen es bei diesem Spezialfall.

15.1 Definition und Proposition. *Es sei \mathcal{S} ein Simplicialkomplex. Auf $V(\mathcal{S})$ sei eine totale Ordnung gewählt. Wir definieren*

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \times \Delta^1 := & \{\emptyset\} \cup ((\mathcal{S} \setminus \{\emptyset\}) \times \{0, 1\}) \cup \\ & \cup \{ \{(v_0, 0), \dots, (v_i, 0), (v_i, 1), \dots, (v_k, 1)\} : \\ & \quad 0 \leq i \leq k, v_0 < v_1 < \dots, v_k, \{v_0, \dots, v_k\} \in \mathcal{S} \}. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{S} := \Delta^1$ ein Simplicialkomplex mit $V(\mathcal{S} := \Delta^1) = V(\mathcal{S}) \times \{0, 1\}$. Für $p \in \{0, 1\}$ ist

$$\begin{aligned} i_p: \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \times \Delta^1 \\ v &\mapsto (v, p) \end{aligned}$$

eine simpliciale Abbildung, und es existiert ein Homöomorphismus $|\mathcal{S} \times \Delta^1| \approx |\mathcal{S}| \times I$, So dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{S}| & & \\ & \searrow^{x \mapsto (x,1)} & \\ & & |\mathcal{S} \times \Delta^1| \xrightarrow{\approx} |\mathcal{S}| \times I \\ & \swarrow_{|i_1|} & \\ & & \\ & \swarrow_{|i_0|} & \\ |\mathcal{S}| & \xrightarrow{x \mapsto (x,0)} & \end{array}$$

kommutiert.

Nehmen wir die topologische Invarianz als gegeben hin, so reduziert sich die Homotopieinvarianz auf folgendes Lemma.

15.2 Lemma. *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex. Dann ist*

$$H_k(i_0) = H_k(i_1): H_k(\mathcal{S}) \rightarrow H_k(\mathcal{S} \times \Delta^1)$$

für alle k und eine beliebige totale Ordnung auf $V(\mathcal{S})$.

Beweis. Wir werden zeigen, dass $C(i_0) \simeq C(i_1)$. Dazu definieren wir

$$K_r: C_r(\mathcal{S}) \rightarrow C_{r+1}(\mathcal{S} \times \Delta^1)$$

$$[v_0, \dots, v_k] \mapsto \sum_{s=0}^k (-1)^s [(v_0, 0), \dots, (v_s, 0), (v_s, 1), \dots, (v_k, 1)],$$

wobei wir $v_0 < \dots < v_k$ annehmen. Durch Rechnung zeigen wir dann, dass

$$\partial_{r+1} K_r + K_{r-1} \partial_r = C_r(i_1) - C_r(i_0),$$

woraus die Behauptung folgt. Die Rechnung benutzt zum Beispiel, dass für $0 \leq j < r$ die Gleichung $[(v_0, \dots, (v_j, 0), \widehat{(v_j, 1)}, (v_{j+1}, 1), \dots, (v_r, 1))] = [(v_0, \dots, (v_j, 0), \widehat{(v_{j+1}, 0)}, (v_{j+1}, 1), \dots, (v_r, 1))]$ gilt, was dafür sorgt, dass sich die entsprechenden Terme wegheben. \square

15.3 Proposition. *Es seien \mathcal{S}, \mathcal{T} Simplicialkomplexe und $f_0, f_1: |\mathcal{S}| \rightarrow |\mathcal{T}|$ stetige Abbildungen mit $f_0 \simeq f_1$. Dann ist $H_r(f) = H_r(g): H_r(\mathcal{S}) \rightarrow H_r(\mathcal{T})$ für alle r .*

Beweis. Sei $h: |\mathcal{S} \times \Delta^1| \xrightarrow{\cong} |\mathcal{S}| \times I$ der Homöomorphismus von oben und $F: |\mathcal{S}| \times I \rightarrow |\mathcal{T}|$ eine Homotopie von f_0 nach f_1 . Dann ist $f_0 = F \circ h \circ |i_0|$ und $f_1 = F \circ h \circ |i_1|$. Daher ist $H_r(f_0) = H_r(F \circ h) \circ H_r(|i_0|) = H_r(F \circ h) \circ H_r(i_0) = H_r(F \circ h) \circ H_r(i_1) = H_r(F \circ h) \circ H_r(|i_1|) = H_r(f_1)$. \square

15.4 Korollar. *Ist f eine Homotopieäquivalenz, so ist $H(f)$ ein Isomorphismus.*

Die Euler-Charakteristik

Eine Homotopieinvariante von Kettenkomplexen und, aufgrund der topologischen Invarianz der Homologie, von Räumen, die sich aus den Homotopiegruppen ableiten lässt, aber zumindest in Spezialfällen viel älter ist, ist die Euler-Charakteristik.

Um die Algebra zu vereinfachen, nehmen wir an, dass wir über einem Körper $R = k$ arbeiten.

15.5 Proposition. *Es sei C ein Kettenkomplex, so dass $\bigoplus_i C_i$ endlich-dimensional ist. Dann ist*

$$\chi(C) := \sum_i (-1)^i \dim_k C_i = \sum_i (-1)^i \dim_k H_i(C).$$

Beweis. Es ist

$$\dim C_i = \dim \operatorname{im} \partial_i + \dim \ker \partial_i = \dim B_{i-1} + \dim Z_i$$

und

$$\dim H_i(C) = \dim Z_i - \dim B_i,$$

also

$$\begin{aligned} \sum_i (-1)^i \dim C_i &= \sum_i (-1)^i \dim Z_i - \sum_i (-1)^i \dim B_i = \\ &= \sum_i (-1)^i \dim H_i(C). \end{aligned}$$

wie behauptet. □

15.6 Korollar. *Es sei \mathcal{S} ein endlicher Simplicialkomplex und $f_i(\mathcal{S})$ die Zahl der i -Simplizes von \mathcal{S} . Dann ist für einen beliebigen Körper k*

$$\chi(\mathcal{S}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i f_i(\mathcal{S}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H_i(\mathcal{S}; k)$$

und

$$\tilde{\chi}(\mathcal{S}) := \sum_{i \geq -1} (-1)^i f_i(\mathcal{S}) = \sum_{i \geq -1} (-1)^i \dim \tilde{H}_i(\mathcal{S}; k).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \dim C_i(\mathcal{S}) &= \begin{cases} f_i(\mathcal{S}), & i \geq 0, \\ 0, & i < 0, \end{cases} \\ \dim \tilde{C}_i(\mathcal{S}) &= \begin{cases} f_i(\mathcal{S}), & i \geq -1, \\ 0, & i < -1, \end{cases} \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus der vorhergehenden Proposition. □

Insbesondere haben wir also, dass $\chi(\mathcal{S})$ eine Homotopieinvariante ist: Ist $|\mathcal{S}| \simeq |\mathcal{T}|$, so ist $\chi(\mathcal{S}) = \chi(\mathcal{T})$.

Exakte Sequenzen

15.7 Definition. Eine Sequenz von R -Moduln und R -linearen Abbildungen

$$\cdots \rightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \rightarrow \cdots,$$

die endlich oder unendlich sein kann, ist *exakt bei dem Modul* A_i , wenn $\ker f_i = \operatorname{im} f_{i-1}$. Sie ist *exakt*, wenn sie bei allen Moduln exakt ist, bei denen das definiert ist. Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0.$$

Dass diese Sequenz exakt ist, bedeutet, dass f injektiv ist, g surjektiv und dass $\ker g = \operatorname{im} f$.

15.8 Definition. Eine Sequenz von R -Kettenkomplexen und R -Kettenabbildungen

$$\cdots \rightarrow A^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} A^i \xrightarrow{f^i} A^{i+1} \rightarrow \cdots,$$

heißt *exakt*, wenn für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Sequenz

$$\cdots \rightarrow A_k^{i-1} \xrightarrow{f_k^{i-1}} A_k^i \xrightarrow{f_k^i} A_k^{i+1} \rightarrow \cdots,$$

von R -Moduln und R -linearen Abbildungen exakt ist.

15.9 Lemma. Sei

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann ist

$$H_k(A) \xrightarrow{H_k(f)} H_k(B) \xrightarrow{H_k(g)} H_k(C)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ exakt.

Beweis. Da $\operatorname{im} f \subset \ker g$ ist $g \circ f = 0$, also $H_k(g) \circ H_k(f) = H_k(g \circ f) = H_k(0) = 0$, also $\operatorname{im} H_k(f) \subset \ker H_k(g)$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & B_{k+1} & \xrightarrow{g_{k+1}} & C_{k+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ & & & & A_k & \xrightarrow{f_k} & B_k & \xrightarrow{g_k} & C_k \\ & & & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{k-1} & \xrightarrow{f_{k-1}} & B_{k-1} & & & & \end{array}$$

Sei $\beta \in \ker H_k(g)$. Es ist $\beta = [b]$, $b \in B_k$, $\partial b = 0$. Da $0 = H_k(g)([b]) = [g_k(b)]$, existiert ein $c \in C_{k+1}$ mit $\partial c = g_k(b)$. Da g_{k+1} surjektiv ist, existiert ein

$d \in B_{k+1}$ mit $g_{k+1}(d) = c$. Es ist also $g_k(b - \partial d) = g_k(b) - g_k(\partial d) = g_k(b) - \partial(g_{k+1}(d)) = g_k(b) - \partial c = 0$. Da $\ker g_k \subset \text{im } f_k$, existiert ein $a \in A_k$ mit $f_k(a) = (b - \partial d)$. Es ist $f_{k-1}(\partial a) = \partial(f_k(a)) = \partial(b - \partial d) = \partial b = 0$, und da f_{k-1} injektiv ist, ist $\partial a = 0$. Also ist $[a] \in H_k(A)$ und $H_k(f)([a]) = [f_k(a)] = [b - \partial d] = [b] = \beta$. Das zeigt $\ker H_k(g) \subset \text{im } H_k(f)$. \square

15.10 Bemerkung. Beweise durch *Diagrammjagd* wie dieser mögen zunächst abschreckend wirken, sind aber mit etwas Übung meist einfach. Man versuche, den Beweis alleine zu reproduzieren, um sich davon zu überzeugen.

Bei dem letzten Beweis scheinen wir weniger herausbekommen zu haben als wir hineingesteckt haben. Wir brauchten, dass g surjektiv und f injektiv ist, und haben doch nur die Exaktheit der Homologiesequenz in der Mitte erhalten. In der Tat muss beispielsweise $H_k(g)$ nicht surjektiv sein. Ist $[c] \in H_k(C)$, so existiert zwar ein $b \in B_k$ mit $g_k(b) = c$, aber dies muss kein Zykel. Wir wissen nur, dass $g_{k-1}(\partial b) = \partial(g_k(b)) = \partial c = 0$. Statt $\partial b = 0$ wissen wir also nur $\partial b \in \text{im } f_{k-1}$. Dies führt zu folgender Definition.

15.11 Definition und Proposition. Sei

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann definiert

$$\partial_*([g_k(b)]) = [a] \quad \text{mit } a \in A_{k-1} \text{ und } f_{k-1}(a) = \partial b$$

eine lineare Abbildung

$$\partial_* : H_k(C) \rightarrow H_{k-1}(A).$$

Beweis. In der Bemerkung vor der Definition haben wir bereits gesehen, dass solche a und b immer existieren. Sobald wir gezeigt haben, dass ∂_* wohldefiniert ist, folgt aus der Linearität von g_k , ∂ und f_{k-1} die von ∂_* . Wir zeigen also die Wohldefiniertheit.

Zunächst einmal ist zu zeigen, dass a ein Zykel ist. Es ist aber $f_{k-2}(\partial a) = \partial f_{k-1}(a) = \partial \partial b = 0$ und f_{k-2} ist injektiv.

Weiter zeigen wir, dass $[a]$ von der Wahl von a und b unabhängig ist. Es seien also zusätzlich a' , b' gegeben und $f_{k-1}(a') = \partial b'$, $g_k(b') = g_k(b)$. Dann ist $b - b' \in \ker g_k = \text{im } f_k$. Es sei $d \in A_k$ mit $f_k(d) = b - b'$. Dann ist $f_{k-1}(\partial d) = \partial f_k(d) = \partial(b - b') = f_{k-1}(a - a')$ und, da f_{k-1} injektiv ist, $\partial d = a - a'$, also $[a] = [a']$. \square

15.12 Proposition (kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen liefert lange exakte Sequenz in Homologie). Sei

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann ist die Sequenz

$$H_k(A) \xrightarrow{H_k(f)} H_k(B) \xrightarrow{H_k(g)} H_k(C) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} H_{k-1}(A) \xrightarrow{H_{k-1}(f)} H_{k-1}(B)$$

exakt.

Beweis. Es bleibt die Exaktheit bei $H_k(C)$ und $H_{k-1}(A)$ nachzuprüfen.

Wir beginnen mit der Exaktheit bei $H_k(C)$. Sei $[b] \in H_k(B)$. Dann ist $H_k(g)([b]) = [g_k(b)]$ und $\mathfrak{d}b = 0 = f_{k-1}(b)$, also $\mathfrak{d}_*(H_k(g)([b])) = [0] = 0$. Sei nun $\gamma \in H_k(C)$, $\mathfrak{d}_*(\gamma) = 0$. Dann gibt es ein $d \in A_k$ und ein $b \in B_k$, so dass $\gamma = [g_k(b)]$, $\mathfrak{d}b = f_{k-1}(\mathfrak{d}d)$. Es ist dann $\mathfrak{d}(b - f_k(d)) = \mathfrak{d}b - f_{k-1}(\mathfrak{d}d) = 0$, also repräsentiert $b - f_k(d)$ ein Element $[b - f_k(d)] \in H_k(B)$ und es ist $H_k(g)([b - f_k(d)]) = [g_k(b) - g_k(f_k(d))] = [g_k(b)] = \gamma$.

Nun zur Exaktheit bei $H_{k-1}(A)$. Ist $\alpha \in \text{im } \mathfrak{d}_*$, so ist $\alpha = [a]$ mit $f_{k-1}(a) = \mathfrak{d}b$ für ein $b \in B_k$. Es ist also $H_{k-1}(f)(\alpha) = [f_{k-1}(a)] = [\mathfrak{d}b] = 0$. Sei andererseits $\alpha = [a]$, $H_{k-1}(f)(\alpha) = 0$. Dann existiert ein $b \in B_k$ mit $\mathfrak{d}b = f_{k-1}(a)$. Da $\mathfrak{d}g_k(b) = g_{k-1}(\mathfrak{d}b) = g_{k-1}(f_{k-1}(a)) = 0$, repräsentiert $g_k(b)$ ein Element von $H_k(C)$, und es ist $\mathfrak{d}_*[g_k(b)] = [a] = \alpha$. \square

Wieder vergewissere man sich, dass es einfacher ist, den Beweis selbst zu führen als ihn nachzuvollziehen.

15.13 Beispiel ($H(\mathfrak{d}\Delta^n)$). Bei der Berechnung von $\tilde{H}(\mathfrak{d}\Delta^n)$ haben wir die Kettenkomplexe $\tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n)$ und $\tilde{C}(\Delta^n)$ verglichen und $\tilde{H}_k(\Delta^n) = 0$ benutzt. Wir wollen dieses hier noch einmal etwas systematischer tun. Fassen wir $\tilde{C}_k(\mathfrak{d}\Delta^n)$ als Untermodul von $\tilde{C}_k(\Delta^n)$ auf, so ist $\tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n)$ ein *Unterkomplex* von $\tilde{C}(\Delta^n)$, das heißt die Inklusionsabbildungen bilden eine Kettenabbildung $i: \tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n) \rightarrow \tilde{C}(\Delta^n)$. In einer solchen Situation bilden die Quotientenmoduln auch immer einen Kettenkomplex und die Quotientenabbildungen eine Kettenabbildung. In unserem Fall ist es besonders einfach, denn

$$\tilde{C}_k(\Delta^n)/\tilde{C}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) \cong \begin{cases} R, & k = n \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Jedenfalls haben wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow \tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n) \xrightarrow{i} \tilde{C}(\Delta^n) \xrightarrow{p} \tilde{C}(\Delta^n)/\tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n) \rightarrow 0.$$

Daraus erhalten wir für $k \in \mathbb{Z}$ eine exakte Sequenz

$$0 \cong \tilde{H}_{k+1}(\Delta^n) \xrightarrow{H_{k+1}(j)} \xrightarrow{H_{k+1}(j)} H_{k+1}(\tilde{C}(\Delta^n)/\tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n)) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} \tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) \xrightarrow{H_k(i)} \tilde{H}_k(\Delta^n) \cong 0$$

das heißt, die Abbildung $\mathfrak{d}_*: H_{k+1}(\tilde{C}(\Delta^n)/\tilde{C}(\mathfrak{d}\Delta^n)) \rightarrow \tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n)$ ist ein Isomorphismus und damit

$$\tilde{H}_k(\mathfrak{d}\Delta^n) \cong \begin{cases} R, & k + 1 = n, \\ 0, & k + 1 \neq n \end{cases}$$

wie zuvor. Da $\tilde{C}_n(\Delta^n)/\tilde{C}_n(\partial\Delta^n)$ von $p([0, \dots, n])$ erzeugt wird und

$$\mathfrak{d}_*([p([0, \dots, n])]) = [\mathfrak{d}[0, \dots, n]] \in \tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n),$$

erhalten wir auch wieder, dass $\mathfrak{d}[0, \dots, n]$ den Erzeuger von $\tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n)$ repräsentiert.

15.14 Beispiel. Ähnlich können wir den Beweis von Proposition 13.15 umformulieren. Es sei also \mathcal{S} ein nicht-leerer zusammenhängender Simplicialkomplex und \mathcal{T} ein aufspannender Baum. Wir haben bereits in Beispiel 14.18 gesehen, dass \mathcal{T} die Homologie eines Punktes hat. Wir betrachten nun ähnlich wie im vorhergehenden Beispiel die kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow C(\mathcal{T}) \xrightarrow{i} C(\mathcal{S}) \xrightarrow{p} C(\mathcal{S})/C(\mathcal{T}) \rightarrow 0.$$

Der für uns interessante Teil der zugehörigen langen exakten Sequenz ist

$$0 \cong H_1(\mathcal{T}) \rightarrow H_1(\mathcal{S}) \xrightarrow{H_1(p)} H_1(C(\mathcal{S})/C(\mathcal{T})) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} H_0(\mathcal{T}) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(\mathcal{S}).$$

Wir wissen, dass $H_0(\mathcal{T}) \cong R$, erzeugt von der Klasse einer Ecke, und aus unserer Diskussion von H_0 folgt nun leicht, dass $H_0(i)$ injektiv ist. Damit ist aufgrund der Exaktheit $\mathfrak{d}_* = 0$ und $H_1(p)$ ein Isomorphismus. Es ist also $H_1(\mathcal{S}) \cong H_1(C(\mathcal{S})/C(\mathcal{T}))$, und wir sollten letzteren Kettenkomplex untersuchen. Da \mathcal{T} aufspannend ist, ist $C_0(\mathcal{S})/C_0(\mathcal{T}) \cong 0$. Es ist also $Z_1(C(\mathcal{S})/C(\mathcal{T})) = C_1(\mathcal{S})/C_1(\mathcal{T})$. Dieser Modul hat eine Basis in Bijektion zu den Kanten von \mathcal{S} , die nicht in \mathcal{T} sind. Andererseits ist $C_2(\mathcal{S})/C_2(\mathcal{T}) \cong C_2(\mathcal{S})$, \mathcal{T} eindimensional ist. Es ist also $B_1(C(\mathcal{S})/C(\mathcal{T})) = \text{im} \left(p_1 \circ \mathfrak{d}_2^{C(\mathcal{S})} \right)$. Proposition 13.15 folgt nun aus $H_1 = Z_1/B_1$.

Die Mayer–Vietoris–Sequenz

Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex und $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ seien Unterkomplexe. Wir nehmen an, dass $\mathcal{S} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1$ und wollen nun einen Zusammenhang zwischen $H(\mathcal{S}), H(\mathcal{K}_0), H(\mathcal{K}_1)$ und $H(\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1)$ herstellen. Meist werden wir $H(\mathcal{S})$ aus den anderen drei bestimmen wollen.

Wählen wir für jeden k -Simplex aus \mathcal{S} eine Orientierung, so gibt uns das eine Basis von $\tilde{C}_k(\mathcal{S})$, und zwar so, dass sie Vereinigung von Basen von $\tilde{C}_k(\mathcal{K}_0)$ und $\tilde{C}_k(\mathcal{K}_1)$ ist und der Schnitt dieser beiden Basen eine Basis von $\tilde{C}_k(\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1)$ ist. Es folgt, dass

$$0 \rightarrow \tilde{C}_k(\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \tilde{C}_k(j^0) \\ -\tilde{C}_k(j^1) \end{pmatrix}} \tilde{C}_k(\mathcal{K}_0) \oplus \tilde{C}_k(\mathcal{K}_1) \xrightarrow{\tilde{C}_k(i^0) + \tilde{C}_k(i^1)} \tilde{C}_k(\mathcal{S}) \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz ist, wobei $i^s: \mathcal{K}_s \rightarrow \mathcal{S}$, $j^s: \mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_s$ die (simplicialen) Inklusionsabbildungen bezeichnen. Da außerdem

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{C}_k(\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \tilde{C}_k(j^0) \\ -\tilde{C}_k(j^1) \end{pmatrix}} & \tilde{C}_k(\mathcal{K}_0) \oplus \tilde{C}_k(\mathcal{K}_1) & \xrightarrow{\tilde{C}_k(i^0) + \tilde{C}_k(i^1)} & \tilde{C}_k(\mathcal{S}) \\ \mathfrak{d}_k \downarrow & & \downarrow \mathfrak{d}_k \oplus \mathfrak{d}_k & & \downarrow \mathfrak{d}_k \\ \tilde{C}_{k-1}(\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \tilde{C}_{k-1}(j^0) \\ -\tilde{C}_{k-1}(j^1) \end{pmatrix}} & \tilde{C}_{k-1}(\mathcal{K}_0) \oplus \tilde{C}_{k-1}(\mathcal{K}_1) & \xrightarrow{\tilde{C}_{k-1}(i^0) + \tilde{C}_{k-1}(i^1)} & \tilde{C}_{k-1}(\mathcal{S}) \end{array}$$

kommutiert und auch die mittlere Spalte Teil eines Kettenkomplexes ist (da $(\mathfrak{d}_{k+1} \oplus \mathfrak{d}_{k-1}) \circ (\mathfrak{d}_k \oplus \mathfrak{d}_k) = (\mathfrak{d}_{k-1} \circ \mathfrak{d}_k) \oplus (\mathfrak{d}_{k-1} \circ \mathfrak{d}_k) = 0 \oplus 0 = 0$), haben wir also eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow \tilde{C}(\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \tilde{C}(j^0) \\ -\tilde{C}(j^1) \end{pmatrix}} \tilde{C}(\mathcal{K}_0) \oplus \tilde{C}(\mathcal{K}_1) \xrightarrow{\tilde{C}(i^0) + \tilde{C}(i^1)} \tilde{C}(\mathcal{S}) \rightarrow 0.$$

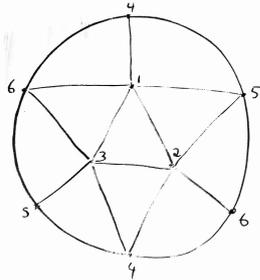
Nun bemerken wir noch, dass Homologie mit direkten Summen vertauscht und erhalten mit Proposition 15.11 folgendes Ergebnis.

15.15 Satz (Mayer–Vietoris). *Es sei \mathcal{S} ein abstrakter Simplicialkomplex und $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ Unterkomplexe, so dass $\mathcal{S} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1$. Dann existiert eine lange exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k(\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \tilde{H}_k(j^0) \\ -\tilde{H}_k(j^1) \end{pmatrix}} \tilde{H}_k(\mathcal{K}_0) \oplus \tilde{H}_k(\mathcal{K}_1) \xrightarrow{\tilde{H}_k(i^0) + \tilde{H}_k(i^1)} \\ & \rightarrow \tilde{H}_k(\mathcal{S}) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \tilde{H}_{k-1}(j^0) \\ -\tilde{H}_{k-1}(j^1) \end{pmatrix}} \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{K}_0) \oplus \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{K}_1) \end{aligned}$$

und ebenso für nicht reduzierte Homologie. \square

15.16 Beispiel. Sei \mathcal{S} die folgende Triangulierung der projektiven Ebene.



Es sei $\mathcal{K}_1 := \mathcal{S} \setminus \{\{1, 2, 3\}\}$ und $\mathcal{K}_0 := \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$. Es ist $\mathcal{K}_0 \cong \Delta^2$ und $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1 \cong \mathfrak{d}\Delta^2$.

Die interessante Teil der reduzierten Mayer–Vietoris–Sequenz ist in diesem Fall daher (beginnend mit $\tilde{H}_2(\mathcal{K}_0) \oplus \tilde{H}_2(\mathcal{K}_1) = 0 \oplus 0 = 0$)

$$0 \rightarrow \tilde{H}_2(\mathcal{S}) \xrightarrow{\mathfrak{d}_*} \tilde{H}_1(\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1) \xrightarrow{-\tilde{H}_1(j^1)} \tilde{H}_1(\mathcal{K}_1) \xrightarrow{\tilde{H}_1(i^1)} \tilde{H}_1(\mathcal{S}) \rightarrow 0.$$

Wir haben also $\tilde{H}_2(\mathcal{S}; R) \cong \ker \tilde{H}_1(j^1)$, $\tilde{H}_1(\mathcal{S}; R) \cong \tilde{H}_1(\mathcal{K}_1) / \text{im } \tilde{H}_1(j^1)$ und müssen daher $\tilde{H}_1(j^1)$ untersuchen. Es sei

$$\mathcal{L} := \{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{4, 6\}\} \subset \mathcal{K}_1$$

und $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}_1$ die Inklusionsabbildung. Da $|f|: |\mathcal{L}| \rightarrow |\mathcal{K}_1|$ eine Homotopieäquivalenz ist, ist $\tilde{H}_1(f): \tilde{H}_1(\mathcal{L}) \rightarrow \tilde{H}_1(\mathcal{K}_1)$ ein Isomorphismus. Da $\mathcal{L} \cong \mathfrak{d}\Delta^2$, wissen wir, dass $\tilde{H}_1(\mathcal{L}) \cong R$ mit Basiselement $[[5, 6] - [4, 6] + [4, 5]]$. Diese Klasse bildet also auch eine Basis von $\tilde{H}_1(\mathcal{K}_1)$. Ebenso haben wir $\tilde{H}_1(\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1) \cong R$ mit Erzeuger $[[2, 3] - [1, 3] + [1, 2]]$. Nun ist in $\tilde{C}(\mathcal{K}_1)$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{d}([1, 4, 5] - [1, 2, 5] + [2, 5, 6] - [2, 4, 6] \\ & \quad - [2, 3, 4] + [3, 4, 5] + [3, 5, 6] + [1, 3, 6] - [1, 4, 6]) \\ &= [4, 5] - [1, 5] + [1, 4] - [2, 5] + [1, 5] - [1, 2] + [5, 6] - [2, 6] + [2, 5] \\ & \quad - [4, 6] + [2, 6] - [2, 4] - [3, 4] + [2, 4] - [2, 3] + [4, 5] - [3, 5] + [3, 4] \\ & \quad + [5, 6] - [3, 6] + [3, 5] + [3, 6] - [1, 6] + [1, 3] - [4, 6] + [1, 6] - [1, 4] \\ &= [4, 5] - [1, 2] + [5, 6] - [4, 6] - [2, 3] + [4, 5] + [5, 6] + [1, 3] - [4, 6] \\ & \quad = 2([5, 6] - [4, 6] + [4, 5]) - ([2, 3] - [1, 3] + [1, 2]), \end{aligned}$$

also in $\tilde{H}_1(\mathcal{K}_1)$

$$[[2, 3] - [1, 3] + [1, 2]] = 2[[5, 6] - [4, 6] + [4, 5]].$$

Wir haben also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_1(\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1) & \xrightarrow{\tilde{H}_1(j^1)} & \tilde{H}_1(\mathcal{K}_1) \\ \uparrow \cong & & \cong \uparrow \\ R & \xrightarrow{\cdot 2} & R \end{array}$$

$1 \mapsto [[2, 3] - [1, 3] + [1, 2]]$ $1 \mapsto [[5, 6] - [4, 6] + [4, 5]]$

Damit ist

$$\begin{aligned} \tilde{H}_2(\mathcal{S}; R) &\cong \ker \tilde{H}_1(j^1) \cong \{r \in R : 2r = 0\}, \\ \tilde{H}_1(\mathcal{S}; R) &\cong \tilde{H}_1(\mathcal{K}_1) / \text{im } \tilde{H}_1(j^1) \cong R/2R, \end{aligned}$$

beispielsweise

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) &\cong 0, & H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Q}) &\cong 0, & H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) &\cong \mathbb{Z}_2, \\ H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}_2, & H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Q}) &\cong 0, & H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) &\cong \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Abschnitt 16

Literatur

Das Buch zu dem Stoff, der bei uns in Topologie I behandelt wird, zu empfehlen, fällt schwer. Wahrscheinlich gibt es deshalb eine so große Zahl an Skripten zur Topologie I, denen ich hier zu allem Überfluss auch noch eines hinzufüge.

Meine erste Buchempfehlung sei eine, die hier eigentlich inhaltlich nicht herpasst. Das Buch von Bredon [Bre93] ist eines über algebraische Topologie, aber fast alles von dem, was wir hier tun werden, ist dort in den Kapiteln 1 und 3 enthalten. Das wenige, das wir in dieser Vorlesung an Homologietheorie behandeln, ist in [Mun84] zu finden.

Drei Bücher, die sich eher an die Hörer dieser Vorlesung richten, sind [Que73], [Jän80] und [Mun75]. Querenburg behandelt auf wenig Raum viel mengentheoretische Topologie, enthält aber im Gegensatz zu den anderen beiden Bänden kein Material über die Fundamentalgruppe. Jänichs Buch enthält auch viele erhellende Passagen mit erzählendem Charakter, es wird sich daher wohl auch schon auf Nachttischen und nicht nur auf Schreibtischen wiedergefunden haben. Über das Buch von Munkres kann ich nicht viel sagen, es scheint aber inhaltlich gut zu unserer Vorlesung zu passen.

Wem das alles zu wenig abstrakt ist, der findet wie immer bei Bourbaki Hilfe. Von [Bou65] werden wir nur Kapitel 1 und 9 benötigen. Ein ‚echtes‘ Buch über mengentheoretische Topologie ist Engelkings Werk [Eng77], in dem man angeblich alles findet.

Ein Buch einer ganz anderen Art ist das von Steen und Seebach. Sucht man einen Raum mit Eigenschaften α und β aber weder γ noch δ , so hat man gute Chancen, ihn in [SS70] zu finden.

[Bou65] BOURBAKI, N. *Topologie Général*, Bd. 3 von *Éléments de mathématique*. Hermann, Paris, 1965.

[Bre93] BREDON, G. E. *Topology and Geometry*, Bd. 139 von *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1993.

[Eng77] ENGELKING, R. *General Topology*. PWN, Warszawa, 1977.

[Jän80] JÄNICH, K. *Topologie*. Springer-Verlag, 1980.

- [Mun75] MUNKRES, J. R. *Topology: a first course*. Prentice-Hall, 1975.
- [Mun84] —. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1984.
- [Que73] VON QUERENBURG, B. *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, 1973.
- [SS70] STEEN, L. A. und SEEBACH, J. A., JR. *Counterexamples in Topology*. Holt, Rinehart and Winston, 1970.