Die Kohomologie der Zopfgruppe und ihre Anwendung auf die Komplexität von Algorithmen

Diplomarbeit
vorgelegt von
Carsten Schultz

Fachbereich Mathematik
FU Berlin

Berlin, 1996

Inhalt

Abschnitt 0

Einleitung

Man kann nicht stetig die Quadratwurzel einer komplexen Zahl ziehen. Genauer gesagt: Ist $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{sqr}\colon S^1 &\to S^1 \\ z &\mapsto z^2, \end{aligned}$$

so gibt es zu sqr keinen stetigen Schnitt, das heißt keine stetige Abbildung $s\colon S^1 \to S^1$, so daß $\mathrm{sqr} \circ s = \mathrm{id}_{S^1}$. Daher wird ein Algorithmus, der zu gegebenem $a \in \mathbb{C}$ die Nullstellen des Polynoms $z^2 + a$ berechnet, nicht ohne eine Fallunterscheidung auskommen, wenn er ansonsten nur stetige Operationen benutzt.

Smale hat 1987 gefragt, wie viele Fallunterscheidungen ein Algorithmus benötigt, der zu gegebenen $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ alle Nullstellen des Polynoms $z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m$ berechnet; diese Anzahl nennt er die topologische Komplexität des Algorithmus [12]. Seine Methode, das Problem anzugehen, ist auch, die Abbildung π vom Raum der Lösungen, nämlich $\mathbb{C}^m$, in den Raum der Fragen, nämlich der Polynome, zu betrachten und nun nicht einfach nach der Existenz eines Schnittes, sondern allgemeiner nach der Überdeckungszahl oder dem Genus[1] der Abbildung zu fragen.

Die Nichtexistenz eines Schnittes von sqr kann man zum Beispiel zeigen, indem man bemerkt, daß aus $\mathrm{sqr} \circ s = \mathrm{id}$ folgt, daß auch die induzierte Abbildung zwischen den Kohomologiegruppen $(\mathrm{sqr} \circ s)^* = s^* \circ \mathrm{sqr}^*\colon H^*(S^1) \to H^*(S^1)$ die Identität ist, also $\operatorname{Ker} \mathrm{sqr}^* = 0$, daß aber $H^1(S^1; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ und $\mathrm{sqr}^* = 0$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$. Um eine Aussage über das Genus machen zu können, betrachtet er nun allgemeiner die Cup-Länge von $\operatorname{Ker} \pi^*$. Es stellt sich heraus, daß man besser einen Unterraum des Raums der Probleme betrachtet, nämlich die Polynome ohne doppelte Nullstellen. Dieser Raum ist wohlbekannt, er ist der klassifizierende Raum der Zopfgruppe, und sein Kohomologiering mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$ wurde 1970 von Fuchs bestimmt [4].

Vassiliev konnte 1989 Smales Ergebnisse verbessern [15]. In unserem Beispiel hätte man die Nichtexistenz eines Schnittes auch zeigen können, indem man benutzt, daß sqr eine zweifache Überlagerung, also ein

[1] Siehe Definition 3.3.1.

$\mathbb{Z}_2$-Prinizpalbündel ist, und die Existenz eines Schnittes die Trivialität des Bündels nach sich ziehen würde. Der klassifizierende Raum für $\mathbb{Z}_2$-Bündel ist $\mathbb{R}P^\infty$, und sqr wird von der Inklusion $i\colon S^1 \cong \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^\infty$ induziert.[2] Wäre nun das Bündel trivial, so wäre i homotop zu einer konstanten Abbildung, also $i^*\colon H^k(\mathbb{R}P^\infty) \to H^k(S^1)$ für $k > 0$ trivial. Es ist aber $i^*\colon H^1(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2) \cong H^1(S^1;\mathbb{Z}_2)$.

Ein Ergebnis von SCHWARZ [11][3] erlaubt es allgemeiner, aus der von der klassifizierenden Abbildung induzierten Abbildung zwischen den Kohomologiegruppen eine Aussage über das Genus des Bündels zu gewinnen. Das durch Einschränkung von π erhaltene Bündel über dem klassifizierenden Raum der Zopfgruppe ist ein $S(m)$-Prinzipalbündel[4]. Es ist für diesen Ansatz also nötig, auch Informationen über die Kohomologie des klassifizierenden Raumes von $S(m)$ und die klassifizierende Abbildung von dem die Zopfgruppe klassifizierenden Raum in ihn zu haben. Außerdem erweist es sich als aussagekräftiger, Koeffizienten in einem gewissen lokalen System an Stelle von $\mathbb{Z}_2$ zu betrachten.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, VASSILIEVs Ergebnisse vollständig darzustellen. Dies geschieht im dritten Abschnitt, in dem die Fragestellung exakt formuliert wird und außer der mit den oben angedeuteten Mitteln erhaltenen unteren Schranke[5] für die topologische Komplexität auch noch eine direkter zu gewinnene obere Schranke[6] angegeben wird.

Im zweiten Abschnitt werden die Zopfgruppe und Konfigurationsräume, denn zu diesen gehören die im obigen Abriß vorkommenden Räume, definiert und die später benötigten Eigenschaften[7] der Kohomologiegruppen dieser Räume enwickelt. Einige mit den zur Verfügung stehenden Mitteln leicht zu erreichende Ergebnisse, die später nicht gebraucht werden, werden skizziert.

Der erste Abschnitt will für alles weitere die Voraussetzungen schaffen. Da ist zunächst ein Teil über klassifizierende Räume einer Gruppe; einerseits, da die meisten der in den späteren Abschnitten auftauchenden Räume solche sind, andererseits, da sie für das Verständnis der Homologie und Kohomologie mit lokalen Koeffizienten nützlich sind. Letztere folgen sodann. Die gesamte Homologietheorie hier in diesem allgemeineren Rahmen zu wiederholen wäre natürlich nicht angemessen. Es ist aber darauf geachtet worden, alles später benutzte zu erwähnen, wenn auch in den Fällen, in denen leicht einzusehen ist, daß sich die Ergebnisse von der Homologie mit konstanten Koeffizienten übertragen lassen, Beweise nur exemplarisch gegeben werden. Eine Definition der Kohomologie einer Gruppe schließt sich an. Dies ist ein

[2]In der Tat wäre es hier sinnvoll, sqr als die Quotientenabbildung $S^1 \to \mathbb{R}P^1$ zu betrachten.

[3]In dieser Arbeit Satz 3.3.6.

[4]$S(m)$ bezeichnet die symmetrische Gruppe.

[5]Satz 3.4.6 und das darauf folgende Korollar.

[6]Satz 3.5.1.

[7]Satz 2.3.7 und Satz 2.3.10.

Beispiel für einen Begriff, der hätte vermieden werden können, da wir es in den meisten Fällen, in denen er in dieser Arbeit auftaucht, tatsächlich mit einem besonderen klassifizierenden Raum dieser Gruppe zu tun haben, doch hätte dies die Darstellung nur verdunkelt. Der erste Abschnitt schließt mit einer Untersuchung der Umkehrabbildung in Homologie, da wir durch sie die Kohomologieabbildung zwischen den klassifizierenden Räumen der Zopfgruppe und der symmetrischen Gruppe erhalten.

In einem Anhang werden mit den Mitteln aus dem zweiten Abschnitt und maschineller Hilfe für einige kleine Fälle konkret die Kohomologiegruppen der Zopfgruppe und der symmetrischen Gruppe berechnet, sowohl mit trivialen Koeffizienten als auch mit Koeffizienten in der im dritten Abschnitt benutzten Darstellung. Dies geschieht auch, um zu unterstreichen, daß die Ergebnisse des zweiten Abschnitts explizit genug sind, um dies zuzulassen.

Standardergebnisse der algebraischen Topologie werden hauptsächlich aus den Lehrbücher von Bredon und Dold [2, 3] zitiert. Ersteres ist unter anderem wegen der Breite des Stoffs sehr geeignet, letzteres präsentiert Ergebnisse häufig in größerer Allgemeinheit. An den wenigen Stellen, an denen geometrische Eigenschaften triangulierter Räume verwandt werden, dient das Buch von Rourke und Sanderson [9] als Quelle.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. Vogt, nicht nur für das Thema und die freundliche Betreuung dieser Arbeit.

Abschnitt 1

Präliminarien

1.1 Klassifizierende Räume und $K(\pi, 1)$

Kategorien

Wir werden im Folgenden einige Kategorien miteinander vergleichen. Die folgenden wohlbekannten Lemmata sind dabei hilfreich. Sie sind zum Beispiel auch bei der Definition abgeleiteter Funktoren in [3, VI.3.3] implizit vorhanden.[1]

1.1.1. Lemma. *Es seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien und $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Existiert eine Regel*[2] *G, die jedem Objekt D aus $\mathcal{D}$ ein Objekt C aus $\mathcal{C}$ mit $FC = D$ zuordnet und ist für alle $C, C' \in \operatorname{Obj} \mathcal{C}$ die Funktion $F\colon \mathcal{C}(C, C') \to \mathcal{D}(FC, FC')$ bijektiv, dann läßt sich G eindeutig zu einem Funktor $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ erweitern, und es existiert eine natürliche Äquivalenz $G \circ F \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$; $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sind also äquivalente Kategorien.* □

1.1.2. Lemma. *Ist $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien und $H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ein Funktor, so existiert ein bis auf natürliche Äquivalenz eindeutiger Funktor $H'\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, so daß $H' \circ F$ natürlich äquivalent zu H ist.* □

Prinzipalbündel

Das Konzept eines Prinzipalbündels (oder Hauptfaserbündels) ist dem Leser sicherlich bekannt, daher fasse ich hier nur die wesentlichen Definitionen und Ergebnisse zusammen. Da dies nur der Erinnerung dienen soll, habe ich einige offensichtliche Definitionen weggelassen. Eine Referenz ist [8]. Man beachte jedoch, daß das, was hier Prinzipalbündel heißt, dort lokal triviales Prinzipalbündel genannt wird. Uns werden im folgenden hauptsächlich Bündel mit diskreten Strukturgruppen über CW-Räumen interessieren.

[1] Dort wird die Kategorie der Moduln mit der Kategorie der freien Auflösungen verglichen.

[2] Das Wort ‘Regel’ benutze ich hier, da die Objekte einer Kategorie eine echte Klasse bilden können. Auf die dadurch auftretenden mengentheoretischen Komplikationen wird bei der Definition von Funktoren meist auch nur erwähnend eingegangen, dem möchte ich mich hier anschließen. Es genügt jedenfalls nicht, daß zu jedem D ein C mit $FC = D$ existiert, sondern ein solches muß durch eine ‘konkrete’ Vorschrift konstruiert werden können.

1.1.3. Definition. Ein G-Prinzipalbündel E über einem Raum B ist ein Raum E zusammen mit einer (stetigen) Rechtsoperation der topologischen Gruppe G auf E und einer Abbildung[3] $p : E \to B$, so daß

(i) $p(e \cdot g) = p(e)$ für alle $e \in E$, $g \in G$ und

(ii) jedes $b \in B$ eine Umgebung U besitzt, so daß es einen Homöomorphismus $\varphi : p^{-1}[U] \to U \times G$ gibt, für den $\varphi(e \cdot g) = \varphi(e) \cdot g$ gilt, wobei G auf $U \times G$ durch $(b, g) \cdot g' := (b, gg')$ operiere, und der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} p^{-1}[U] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times G \arrow[dl, "p_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Ein Morphismus von (E, p, B) nach (E', p', B') ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "\bar{f}"] & B', \end{tikzcd}$$

wobei $\bar{f} \colon B \to B'$ eine Abbildung und $f \colon E \to E'$ eine äquivariante Abbildung ist, das heißt $f(e \cdot g) = f(e) \cdot g$ für $e \in E$ und $g \in G$.

1.1.4. Proposition. *Alle Prinzipalbündelmorphismen sind Pull-back-Diagramme.* □

1.1.5. Proposition. *Ist (E, p, B) ein Prinzipalbündel und existiert ein stetiger Schnitt von p, so ist das Bündel trivial.* □

1.1.6. Definition. Ist E ein Rechts-G-Raum, E' ein Links-G-Raum, so bezeichne $E \times_G E'$ den Raum $E \times E'/\sim$, wobei $\sim$ die von $(e \cdot g, e') \sim (e, g \cdot e')$ erzeugte Äquivalenzrelation sei.

1.1.7. Proposition. *Sind (E, p, B) und (E', p', B') G-Prinzipalbündel und P ein beliebiger Raum, so stehen G-Abbildungen $P \times E \to E'$ über einer Abbildung $f \colon P \times X \to X'$ in bijektiver Korrespondenz zu kommutativen Diagrammen*

$$\begin{tikzcd} & E \times_G E' \arrow[d] \\ P \times X \arrow[ur] \arrow[r, "(pr_X, f)"] & X \times X', \end{tikzcd}$$

[3] Mit 'Abbildung' sei eine stetige Funktion gemeint, manchmal auch allgemeiner ein Morphismus in der gerade behandelten Kategorie.

wobei die Links-G-Operation auf E' durch $g \cdot e := e \cdot g^{-1}$ definiert sei. □

1.1.8. Definition. Ein Bündel über einem Raum B heißt numerierbar, wenn es eine offene Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ von B und eine lokal endliche Partition der Eins $(p_j)_{j \in J}$ gibt, so daß das Bündel über jedem U_j trivial ist und der Träger jedes p_j in U_j enthalten ist.

Prinzipalbündel über parakompakten Räumen, zum Beispiel über CW-Räumen, sind also immer numerierbar.

1.1.9. Proposition. *Sei ξ ein numerierbares Prinzipalbündel. Ist f eine Abbildung, so ist auch $f^*(\xi)$ numerierbar. Sind f und g homotope Abbildungen, so ist $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$.* □

1.1.10. Definition. Ist ξ ein numerierbares G-Prinzipalbündel über B, B' ein Raum, so induziert $f \mapsto f^*(\xi)$ wegen Proposition 1.1.9 eine Abbildung von den Homotopieklassen von Abbildungen von B' nach B in die Isomorphieklassen von G-Prinzipalbündeln über B'. Ist diese Abbildung bijektiv, so heißt ξ universell für G-Bündel über B'.

1.1.11. Proposition. *Ist $\xi = (E, p, B)$ ein G-Prinzipalbündel mit $\pi_k(E) = 0$ für $k \geq 0$, so ist es klassifizierend für G-Prinzipalbündel über CW-Räumen. Dies gilt auch, wenn man die gepunkteten Kategorien betrachtet.* □

Diskrete Strukturgruppen

Ein Beispiel für Prinzipalbündel zu einer diskreten Gruppe sind reguläre Überlagerungen mit der Operation der Deckbewegungsgruppe. Die Deckbewegungsgruppe operiert allerdings von links, aber natürlich kann daraus wie üblich eine Operation von rechts konstruiert werden durch $(x, D) \mapsto D^{-1}(x)$ für einen Punkt x und eine Deckbewegung D. Reguläre Überlagerungen seien immer auf diese Art als als Prinzipalbündel verstanden.

Es sei X ein Raum mit universeller Überlagerung $p_X : \tilde{X} \to X$. $\tilde{X}$ habe Basispunkt $\tilde{x}_0$ und es sei $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Ebenso seien Y, $\tilde{Y}$ und so weiter. Es sei $G = \pi_1(X, x_0)$, $H = \pi_1(Y, y_0)$. Nun ist G isomorph zur Deckbewegungsgruppe von $\tilde{X}$ vermittels $g \mapsto D_g$, wobei D_g die eindeutig bestimmte Deckbewegung mit $D_g(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot g$ sei. Damit operiert G von rechts auf $\tilde{X}$. Ist nun $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$, so operiert G durch $(g, h) \mapsto \varphi(g)h$ von links auf H. Wir haben damit einen Raum $\tilde{X} \times_G H$, den ich der Deutlichkeit halber mit $\tilde{X} \times_\varphi H$ bezeichnen möchte. Er ist also durch die Äquivalenzrelation $(D_g^{-1}\tilde{x}, h) \sim (\tilde{x}, \varphi(g)h)$ auf $\tilde{X} \times H$ gegeben. Die Rechtsoperation von H auf sich selbst macht diesen Raum zu einem H-Prinzipalbündel. $\tilde{X} \times_\varphi H$ sei mit Basispunkt $[\tilde{x}_0, e]$ ausgestattet.

Andererseits ist auch $\tilde{Y}$ ein H-Prinzipalbündel, so daß jede Abbildung $X \to Y$ ein H-Prinzipalbündel $f^*(\tilde{Y})$ über X liefert. Wir betrachten nun das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}(G,H) \arrow[dr, "\varphi\mapsto\tilde{X}\times_{\varphi}H", "\text{(ii)}"'] & \\
{[X,Y]_*} \arrow[ur, "\pi_1", "\text{(i)}"'] \arrow[rr, "\text{(iii)}", "f\mapsto f^*(\tilde{Y})"'] & & \begin{array}{c}\text{punktierte Isomorphieklassen}\\ \text{von } H\text{-Bündeln über } X\end{array}
\end{tikzcd}$$

1.1.12. Proposition. *Ist X zusammenhängend mit universeller Überlagerung $\tilde{X}$, so ist* (ii) *injektiv.*

Beweis. Seien $\varphi, \rho \in \mathrm{Hom}(G, H)$ und $f : \tilde{X} \times_\varphi H \to \tilde{X} \times_\rho H$ ein Isomorphismus. Zu jedem $\tilde{x} \in \tilde{X}$ gibt es ein $h_0 \in H$, so daß $f[\tilde{x}, e] = [\tilde{x}, h_0]$. Da f stetig ist und die Bündel lokal trivial mit diskreter Faser sind, ist h_0 als Funktion von $\tilde{x}$ lokal konstant. Da $\tilde{X}$ zusammenhängend ist, ist h_0 konstant. Sei nun $g \in G$ beliebig. Da f äquivariant ist, ist

$$f[\tilde{x}, \varphi(g)] = f[\tilde{x}, e] \cdot \varphi(g) = [\tilde{x}, h_0] \cdot \varphi(g) = [\tilde{x}, h_0\varphi(g)].$$

Andererseits ist

$$f[\tilde{x}, \varphi(g)] = f[D_g^{-1}\tilde{x}, e] = [D_g^{-1}\tilde{x}, h_0] = [\tilde{x}, \rho(g)h_0]$$

und damit

$$\rho(g) = h_0\varphi(g)h_0^{-1}.$$

Da aber f die Basispunkte respektiert, ist $f[\tilde{x}_0, e] = [\tilde{x}_0, e]$, also $h_0 = e$ und damit $\rho = \varphi$. □

1.1.13. Bemerkung. Geht man in die Kategorie der Räume ohne Basispunkt über, so muß man also wie üblich Konjugationsklassen von Abbildungen von G nach H betrachten.

1.1.14. Proposition. *Hat zusätzlich Y eine universelle Überlagerung $\tilde{Y}$, so kommutiert das Diagramm.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ und $f_\# : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ die induzierte Abbildung. Es ist zu zeigen, daß $\tilde{X} \times_{f_\#} H \cong f^*(\tilde{Y})$. Nach Proposition 1.1.4 genügt es, einen Morphismus $\tilde{X} \times_{f_\#} H \to \tilde{Y}$ über f anzugeben. Sei also $[\tilde{x}, h] \in \tilde{X} \times_{f_\#} H$. Man wähle einen Weg $w : I \to \tilde{X}$ mit $w(0) = \tilde{x}_0$ und $w(1) = \tilde{x}$. Da $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, bestimmt $\tilde{x}$ den Weg w bis auf Homotopie relativ ∂I. Man hebe nun $f \circ p_X \circ w$ zu einem Weg $\bar{w} : I \to \tilde{Y}$ mit $\bar{w}(0) = \tilde{y}_0$ hoch. Da $\bar{w}(1)$ von der Homotopieklasse relativ ∂I von w eindeutig bestimmt ist, setze man nun

$$[\tilde{x}, h] \mapsto D_h^{-1}(\bar{w}(1)).$$

Dies ist stetig und äquivariant, und $p_Y(D_h^{-1}\bar{w}(1)) = p_Y(\bar{w}(1)) = f(p_X(\tilde{x})) = f(p([\tilde{x}, h]))$, es ist also nur noch zu zeigen, daß die Abbildung auch wirklich wohldefiniert ist. Man betrachte dazu $[D_g\tilde{x}, f_\#(g)h] = [\tilde{x}, h]$ für beliebiges $g \in G = \pi_1(X)$. g wird repräsentiert von einem geschlossenen Weg α in X mit Hochhebung $\tilde{\alpha}$ nach $\tilde{X}$. Nun ist $\tilde{\alpha} * (D_g \circ w)$ ein Weg von $\tilde{x}_0$ nach $D_g\tilde{x}$. Es ist $f \circ p_X \circ (\tilde{\alpha} * (D_g \circ w)) = f_\#\alpha * (f \circ p_X \circ w)$ mit Hochhebung $\widetilde{f_\#\alpha} * (D_{f_\# g} \circ \bar{w})$ und

$$(\widetilde{f_\#\alpha} * (D_{f_\# g} \circ \bar{w}))(1) = (D_{f_\# g} \circ \bar{w})(1),$$

so daß

$$\begin{aligned}[D_g\tilde{x}, f_\#(g)h] &\mapsto D^{-1}_{f_\#(g)h}(D_{f_\# g}(\bar{w}(1))) \\ &= D_{h^{-1}(f_\# g)^{-1} f_\# g}(\bar{w}(1)) = D_h^{-1}(\bar{w}(1)),\end{aligned}$$

was unsere Zweifel zerstreut. □

1.1.15. Proposition. *Ist zusätzlich X ein CW-Raum und $\pi_k(Y) = 0$ für $k \neq 1$, so ist* (iii) *(und damit auch* (i) *und* (ii)*) bijektiv.*

Beweis. Proposition 1.1.11 □

1.1.16. Korollar. *Es seien in obiger Situation X, X' zusammenhängende CW-Räume mit Basispunkten x_0 und x_0', $f\colon X \to Y$ und $f'\colon X' \to Y$ Abbildungen, E und E' H-Prinzipalbündel isomorph zu $f^*(\tilde{Y})$ beziehungsweise $f'^*(\tilde{Y})$. Dann läßt sich eine Abbildung $g\colon X \to X'$ genau dann zu einem Morphismus von H-Bündeln $E \to E'$ hochheben, wenn*

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{g_\#} & \pi_1(X', x_0') \\ \downarrow{\scriptstyle f_\#} & & \downarrow{\scriptstyle f'_\#} \\ \pi_1(Y, y_0) & = & \pi_1(Y, y_0)\end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Läßt sich g hochheben, so heißt das, daß $f^*(\tilde{Y}) \cong E \cong g^*(E') \cong g^*(f'^*(\tilde{Y})) = (f' \circ g)^*(\tilde{Y})$, also da (iii) injektiv ist, $f \simeq f' \circ g$, und das Diagramm kommutiert. Kommutiert andererseits das Diagramm, so ist, da (i) injektiv ist, $f \simeq f' \circ g$ und damit $E \cong f^*(\tilde{Y}) \cong (f' \circ g)^*(\tilde{Y}) = g^*(f'^*(\tilde{Y})) \cong g^*(E')$, so daß sich g zu einem Morphismus hochheben läßt. □

1.1.17. Proposition. *Es seien E und E' H-Prinzipalbündel (H eine diskrete Gruppe) über den zusammenhängenden CW-Räumen X und X'. Sind $\tilde{f}_i\colon E \to E'$ für $i = 0, 1$ punktierte Morphismen über $f_i\colon X \to X'$ und $f_0 \simeq f_1$, dann ist $\tilde{f}_0 \simeq \tilde{f}_1$ (via einer H-äquivarianten Homotopie).*

Beweis. Nach Proposition 1.1.7 korrespondiert $\tilde{f}_0$ mit einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} & E \times_H E' \arrow[d] \\ \{0\} \times X \arrow[ur] \arrow[r, "(pr_X, f_0)"] & X \times X', \end{tikzcd}$$

Sei nun $F : I \times X \to X'$ eine Homotopie zwischen f_0 und f_1. Da die Projektion $E \times_H E' \to X \times X'$ lokal trivial und daher Faserung ist, läßt sich das Diagramm

$$\begin{tikzcd} I \times \{*\} \cup \{0\} \times X \arrow[r] \arrow[d] & E \times_H E' \arrow[d] \\ I \times X \arrow[r, "(pr_X, F)"] \arrow[ur, dotted] & X \times X' \end{tikzcd}$$

vervollständigen [2, VII.6.3]. Dabei ist die obere Abbildung auf $I \times \{*\}$ konstant und auf $\{0\} \times X$ durch das vorhergehende Diagramm gegeben. Damit existiert eine Homotopie zwischen $\tilde{f}_0$ und einer H-Abbildung über f_1. Da diese auf dem Basispunkt mit $\tilde{f}_1$ übereinstimmt, X zusammenhängend und H diskret ist, handelt es sich bei ihr um $\tilde{f}_1$. □

Die Räume $K(\pi, 1)$

1.1.18. Definition. Ist G eine Gruppe, so heißt ein Raum X vom Typ $K(G, n)$, wenn $\pi_n(X) \cong G$ und $\pi_k(X) = 0$ für $k \neq n$. Will man die Gruppe G nicht bezeichnen, so sagt man X sei vom Typ $K(\pi, n)$.

Diese Räume heißen auch Eilenberg-Mac-Lane-Räume. Um sie zu konstruieren, bedient man sich des Anheftens von Zellen. Dessen Effekt auf die Homotopiegruppen beschreibt die folgende Proposition.

1.1.19. Proposition. *Sei X ein Raum mit Basispunkt, $n \geq 1$ und $\{f_\alpha\}$ eine Menge von punktierten Abbildungen $f_\alpha \colon S^n \to X$. Ist Y der Raum der aus X durch Anheften von $(n+1)$-Zellen vermittels der f_α entsteht und $i \colon X \to Y$ die Inklusion, so ist $i_\# \colon \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ ein Isomorphismus für $k < n$ und für $k = n$ ein Epimorphismus, dessen Kern die kleinste Untergruppe ist, die die $[f_\alpha] \in \pi_n(X)$ enthält und bezüglich der Operation von $\pi_1(X)$ auf $\pi_n(X)$ abgeschlossen ist. Für $n = 1$ ist der Kern also gerade der kleinste Normalteiler, der die $[f_\alpha]$ enthält.*

Beweis. Der Fall $n \geq 2$ ist eine Folgerung aus dem Satz von Whitehead und in [2, VII.11.7] bewiesen. Der Fall $n = 1$ folgt direkt aus dem Satz von Seifert und van Kampen. □

1.1.20. Proposition. *Ist G eine Gruppe, so existiert ein CW-Raum vom Typ $K(G, 1)$. Dieser kann nach einem festem Verfahren konstruiert werden.*

Beweis. Man beginnt mit einer 0-Zelle, die auch Basispunkt ist. An diese heftet man für jedes Element von G eine 1-Zelle an. Den so entstandenen Raum nennen wir X. Seine Fundamentalgruppe ist die freie Gruppe auf den Elementen von G, so daß es einen kanonischen Epimorphismus $\pi_1(X) \to G$ gibt. Heften wir für jedes Element des Kerns dieses Epimorphismus, das ja durch eine Abbildung $S^1 \to X$ repräsentiert wird,[4] eine 2-Zelle an, so ist die Fundamentalgruppe des so entstandenen Raumes nach Proposition 1.1.19 isomorph zu G. Heften wir nun für jedes Element aus π_2 eine 3-Zelle an, so hat der neue Raum nach der selben Proposition die gleiche Fundamentalgruppe aber eine triviale zweite Homotopiegruppe. Dies wiederholt man für alle höheren Homotopiegruppen. □

1.1.21. Proposition. *Ist X ein CW-Raum, Y ein Raum vom Typ $K(\pi, 1)$, $h : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ ein Gruppenhomomorphismus, so existiert eine Abbildung $f : X \to Y$, die h induziert. In der gepunkteten Kategorie ist f bis auf Homotopie eindeutig.*

Beweis. Proposition 1.1.15. □

Damit und mit Lemma 1.1.1 haben wir:

1.1.22. Satz. *π_1 ist eine Äquivalenz von der Kategorie der punktierten CW-Räume vom Typ $K(\pi, 1)$ und Homotopieklassen stetiger Abbildungen in die Kategorie der Gruppen und Gruppenhomomorphismen.* □

1.1.23. Korollar. *Sind X und Y zwei CW-Räume vom Typ $K(G, 1)$, so sind sie homotopieäquivalent.* □

Faserungen und Überlagerungen

Es ist bekannt, daß für eine Faserung $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(B) \xrightarrow{\mathfrak{d}} \pi_n(F) \xrightarrow{i_\#} \pi_n(E) \xrightarrow{p_\#} \pi_n(B) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(B) \xrightarrow{\mathfrak{d}} \pi_0(F) \xrightarrow{i_\#} \pi_0(E) \xrightarrow{p_\#} \pi_0(B)$$

existiert [2, VII.6.7]. Die π_1 sind Gruppen, die π_0 Mengen mit Basispunkt. Die Abbildung $\mathfrak{d} : \pi_1(B) \to \pi_0(F)$ weist aber mehr Struktur auf, als einfach nur den Basispunkt zu erhalten. Sie kann wie folgt beschrieben werden. Ein Element α der Fundamentalgruppe des Basisraums B wird durch einen Weg,

[4] Sollte der aufmerksame Leser an dieser Stelle einwenden, daß wir hier, wie auch später, eine Wahl treffen, was wir uns in der Behauptung durch die Phrase 'nach einem festen Verfahren' untersagt haben, so heften wir statt dessen für *jede* Abbildung $S^1 \to X$, die ein Element des Kerns repräsentiert, eine Zelle an.

der im Basispunkt anfängt und endet, repräsentiert. Dieser kann nun im Totalraum E zu einem Weg hochgehoben werden, der im Basispunkt beginnt und in einem Punkt der Faser endet. Das von diesem Punkt repräsentierte Element aus $\pi_0(F)$ ist das Bild $\mathfrak{d}(\alpha)$.

Seien nun $\alpha, \beta, g \in \pi_1(B)$, $g \in \operatorname{Im} p_\#$, $\beta = g\alpha$. Da ein Repräsentant von g zu einem geschlossenen Weg hochgehoben werden kann, können α und β zu Wegen mit gleichen Endpunkten hochgehoben werden, also $\mathfrak{d}(\alpha) = \mathfrak{d}(\beta)$.

Sei nun andererseits $\mathfrak{d}(\alpha) = \mathfrak{d}(\beta)$. Sind nun also a und b Wege im Totalraum, die α und β repräsentieren, so gibt es einen Weg w, der den Endpunkt von a mit dem von b verbindet und ganz in der Faser verläuft. $a * w * b^{-1}$ ist also ein geschlossener Weg im Totalraum und die Projektion auf den Basisraum repräsentiert $\alpha e \beta^{-1}$. Damit ist $\alpha\beta^{-1} \in \operatorname{Im} p_\#$.

$\mathfrak{d}$ bildet also alle Elemente einer rechtsseitigen Restklasse von $\operatorname{Im} p_\#$ auf das gleiche Element ab. Verschiedene Restklassen werden jedoch auf verschiedenes abgebildet. In dem wichtigen Fall, daß der Totalraum wegzusammenhängend ist, kann man $\pi_0(F)$ also mit eben diesen Restklassen identifizieren. Daß $\pi_0(F)$ nicht allgemein eine Gruppenstruktur erlaubt, so daß $\mathfrak{d}$ Homomorphismus würde, reflektiert die Tatsache, daß nicht jede Untergruppe Normalteiler ist.

1.1.24. Proposition. *Ist*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

ein Pull-back-Diagramm, dessen rechte Spalte eine Faserung mit Faser F ist, so gilt das auch für die linke Spalte und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d] & {} \arrow[d] \\ \pi_{n+1}(B') \arrow[r] \arrow[d] & \pi_{n+1}(B) \arrow[d] \\ \pi_n(F) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \pi_n(F) \arrow[d] \\ \pi_n(E') \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(E) \arrow[d] \\ \pi_n(B') \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(B) \arrow[d] \\ {} & {} \end{tikzcd}$$

mit den langen exakten Homotopiesequenzen als Spalten kommutiert. $\square$

1.1.25. Korollar. *Ist*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

ein Pull-back-Diagramm, dessen rechte Spalte eine Überlagerung ist, so ist auch

$$\begin{tikzcd} \pi_1(E') \arrow[r, "\tilde f_\#"] \arrow[d, "p'_\#"] & \pi_1(E) \arrow[d, "p_\#"] \\ \pi_1(B') \arrow[r, "f_\#"] & \pi_1(B) \end{tikzcd}$$

ein Pull-back-Diagramm. Ist B' wegzusammenhängend, so trifft $f_\#$ genau dann jede rechtsseitige Restklasse von $p_\#[\pi_1(E)]$, wenn E' wegzusammenhängend, also p' eine Überlagerung, ist.

Beweis. Sei F die (diskrete) Faser der Überlagerung, dann ist obiges Diagramm in

$$\begin{tikzcd} \pi_1(F) \cong 0 \arrow[d] & \pi_1(F) \cong 0 \arrow[d] \\ \pi_1(E') \arrow[r, "\tilde f_\#"] \arrow[d, "p'_\#"] & \pi_1(E) \arrow[d, "p_\#"] \\ \pi_1(B') \arrow[r, "f_\#"] \arrow[d, "\mathfrak{d}'"] & \pi_1(B) \arrow[d, "\mathfrak{d}"] \\ \pi_0(F) \arrow[r, equal] & \pi_0(F) \end{tikzcd}$$

eingebettet. Für den ersten Teil der Behauptung ist einerseits zu zeigen, daß $(\tilde f_\#, p'_\#)$ injektiv ist, aber bereits $p'_\#$ ist injektiv. Andererseits ist für $a \in \pi_1(B')$, $b \in \pi_1(E)$ mit $f_\#(a) = p_\#(b)$ zu zeigen, daß ein $x \in \pi_1(E')$ existiert, so daß $p'_\#(x) = a$ und $\tilde f_\#(x) = b$. Da $\mathfrak{d}'(a) = \mathfrak{d}(f_\#(a)) = \mathfrak{d}(p_\#(b)) = 0$, existiert ein x mit $p'_\#(x) = a$. Nun ist $p_\#(\tilde f_\#(x)) = f_\#(p'_\#(x)) = f_\#(a) = p_\#(b)$, also $\tilde f_\#(x) = b$. Für den zweiten Teil der Behauptung betrachtet man folgenden Teil des Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(E) \arrow[d] \\
\pi_1(B') \arrow[r, "f_\#"] \arrow[d, "\mathfrak{d}'"] & \pi_1(B) \arrow[d, "\mathfrak{d}"] \\
\pi_0(F) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \pi_0(F) \arrow[d] \\
\pi_0(E') \arrow[d] & \pi_0(E) \cong 0 \\
\pi_0(B') \cong 0 &
\end{tikzcd}$$

Nach den Bemerkungen über $\mathfrak{d}$ trifft $f_\#$ genau dann jede Restklasse, wenn $\mathfrak{d} \circ f_\#$, also $\mathfrak{d}'$ surjektiv ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\pi_0(E')$ trivial ist. □

Die in diesem Beweis vorkommenden Segmente der Homotopiesequenzen der Faserungen ergeben sich natürlich auch leicht direkt aus der Theorie der Überlagerungen.

Mehr über $K(\pi, 1)$

1.1.26. Proposition. *Ist $i : G \to H$ eine Inklusion, so gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "g", "\cong"'] \arrow[d, "i"] & \pi_1(X) \arrow[d, "p_\#"] \\
H \arrow[r, "h", "\cong"'] & \pi_1(Y),
\end{tikzcd}$$

wobei X, Y CW-Räume vom Typ $K(\pi, 1)$ sind und p eine Überlagerung ist. Y und h können vorgegeben sein.

Beweis. Man wähle, falls nicht vorgegeben, einen CW-Raum Y vom Typ $K(H, 1)$ und einen Isomorphismus h. Y hat eine Überlagerung $p : X \to Y$ mit $p_\#[\pi_1(X)] = (h \circ i)[G]$. Man kann also problemlos g wählen. Man sieht leicht, daß eine CW-Zerlegung von Y eine von X induziert [2, IV.8.10]. Daß alle Homotopiegruppen von X außer der ersten trivial sind, folgt sofort aus der Homotopiesequenz, da die Faser diskret ist. □

Diese Konstruktion ist im Wesentlichen eindeutig:

1.1.27. Proposition. *Sind $p^X : \tilde{X} \to X$ und $p^Y : \tilde{Y} \to Y$ Überlagerungen, X und Y CW-Räume vom Typ $K(\pi, 1)$, und existiert ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\tilde{X}) \arrow[r, "\cong"'] \arrow[d, "p^X_\#"] & \pi_1(\tilde{Y}) \arrow[d, "p^Y_\#"] \\
\pi_1(X) \arrow[r, "\cong"'] & \pi_1(Y),
\end{tikzcd}$$

so existieren Pull-back-Diagramme

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "p^X"] & \tilde{Y} \arrow[d, "p^Y"] \\
X \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd} \quad \textit{und} \quad \begin{tikzcd}
\tilde{Y} \arrow[r] \arrow[d, "p^Y"] & \tilde{X} \arrow[d, "p^X"] \\
Y \arrow[r, "h"] & X,
\end{tikzcd}$$

so daß g und h homotopieinvers sind.

Beweis. Zunächst gibt es eine Homotopieäquivalenz $g : X \to Y$, so daß $g_\#$ der Isomorphismus aus dem ersten Diagramm ist. Sei nun

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[r] \arrow[d, "\hat{p}^X"] & \tilde{Y} \arrow[d, "p^Y"] \\
X \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

ein Pull-back-Diagramm. Nach Korollar 1.1.25 ist dann $\hat{p}^X$ eine Überlagerung und $\hat{p}^X_\#[\pi_1(\hat{X})] = (g_\#^{-1} \circ p^Y_\#)[\pi_1(\tilde{Y})] = p^X_\#[\pi_1(\tilde{X})]$. Nun weiß man aber aus der Theorie der Überlagerungen, daß damit p^X und $\hat{p}^X$ äquivalent sind, das heißt wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "p^X"'] & \tilde{X} \arrow[r] \arrow[dl, "\hat{p}^X"] & \tilde{Y} \arrow[d, "p^Y"'] \\
X \arrow[rr, "h"] & & Y,
\end{tikzcd}$$

das natürlich auch ein Pull-back-Diagramm ist. Analog für die Homotopieinverse zu g. $\square$

1.2 (Ko)homologie mit lokalen Koeffizienten

Kohomologie mit lokalen Koeffizienten ist ein Standardwerkzeug aber in den meisten Lehrbüchern höchtens ansatzweise enthalten. Ich entwickle hier so viel der Theorie, wie man braucht, um die Homologie und Kohomologie von CW-Räumen zu berechnen und die Dualitätssätze für Mannigfaltigkeiten zu erhalten. Zunächst beschreibe ich die Kategorie, auf der wir die Homologietheorie definieren wollen und gebe an, wie die üblichen Axiome für diese Kategorie anzupassen sind. Nachdem ich aus den Axiomen gefolgert habe, wie die Homologie von CW-Räumen zu berechnen ist, führe ich singuläre Homologie und Kohomologie ein und diskutiere auf ihrer Grundlage Mannigfaltigkeiten und die Sätze von KÜNNETH und WHITEHEAD.

Koeffizientensysteme

Gewöhnliche Homologie hat als Eingangsdaten einen Raum und eine abelsche Gruppe. Die Idee hinter Kohomologie mit lokalen Koeffizienten ist nun, daß der Raum seine Koeffizientengruppe mitbringt, und zwar als Bündel über dem Raum X. Gewöhnliche Homologie entspricht dann dem Spezialfall eines trivialen Bündels, das heißt konstanter Koeffizienten. Mit Bündel meine ich hier ein Konzept analog zu einem Vektorraumbündel, nur mit einer abelschen Gruppe G an Stelle eines Vertorraums.[5] Ich werde dieses Konzept nicht weiter ausführen, denn wie zu einem Vektorraumbündel ein $\mathrm{GL}(n)$-Prinzipalbündel gehört, so gehört zu einem solchen Bündel ein $\mathrm{Aut}(G)$-Prinzipalbündel, so daß wir uns auf diese beschränken können. Ich erinnere daran, daß wir in Proposition 1.1.15 gefunden haben, daß diese für viele Räume in bijektiver Korrespondenz zu Homomorphismen $\pi_1(X) \to \mathrm{Aut}(G)$ stehen, und in der Tat könnte man auch solche als Grundlage für Homologie mit lokalen Koeffizienten wählen.[6] Dort haben wir auch gesehen, daß ein $\mathrm{Aut}(G)$-Prinzipalbündel über X aus einem Raum $\tilde{X}$ mit einer Rechtsoperation einer Gruppe H und einer Abbildung $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ als $\tilde{X} \times_\varphi \mathrm{Aut}(G)$ entstehen kann. Auch dieses Konzept könnte man einer Homologietheorie mit lokalen Koeffizienten zu Grunde legen (äquivariante Homologie). Ich bemerke, daß ein $\mathrm{Aut}(G)$-Prinzipalbündel P als Spezialfall hiervon angesehen werden kann, und daß $P \times_{\mathrm{id}} \mathrm{Aut}(G) \cong P$.

Nach dieser Diskussion nun zur Entscheidung.

1.2.1. Definition. Sei G eine abelsche Gruppe. Ein Raumpaar mit Koeffizienten in G ist ein $\mathrm{Aut}(G)$-Prinzipalbündel zusammen mit einem Unterraum $A \subset X$. Wir schreiben dafür $(X, A; E)$ und sehen p als implizit verstanden an. Für $(X, \emptyset; E)$ schreiben wir auch $(X; E)$ und für $(X, A; X \times \mathrm{Aut}(G))$ auch $(X, A; G)$. Ein Morphismus $f : (X, A; E) \to (X', A'; E')$, häufig auch kurz Abbildung genannt, ist ein Prinzipalbündelmorphismus $f : E \to E'$ mit $p'[f[p^{-1}[A]]] \subset A'$.

Eine Homotopie zwischen Morphismen $f_0, f_1 \colon (X, A; E) \to (X', A'; E')$ ist ein Morphismus $F : (I \times X, I \times A; I \times E) \to (X', A'; E')$, so daß $F|_{\{0\}\times E} = f_0$ und $F|_{\{1\}\times E} = f_1$.

[5]Um genau zu sein, meine ich lokal triviale Garben.

[6]Oder besser lokale Systeme, zu diesem Konzept und der Äquivalenz mit Homomorphismen $\pi_1(X) \to \mathrm{Aut}(G)$ für wegzusammenhängende Räume siehe [13, excs. 1.8.F].

Manchmal werden wir den Morphismus $f : (X, A; E) \to (X', A'; E')$ auch mit der induzierten Abbildung $(X, A) \to (X', A')$ identifizieren, was selten Probleme bereitet, da jeder Morphismus von Prinzipalbündeln ein Pull-back ist.

Für zusammenhängende CW-Räume X kann man wie bereits gesagt auch Homomorphismen $\pi_1(X) \to \operatorname{Aut} G$ betrachten. Wir präzisieren dies nun.

1.2.2. Proposition. *Ist H eine (diskrete) Gruppe, Y ein fester Raum vom Typ $K(H,1)$ mit universeller Überlagerung $\tilde{Y}$ und Basispunkt Y_0 und festem Isomorphismus $\pi_1(Y, y_0) \to H$, so existiert genau ein Funktor F von der Kategorie der punktierten H-Prinzipalbündel über zusammenhängenden CW-Räumen und Homotopieklassen von H-Bündelmorphismen in die Kategorie, deren Objekte zusammenhängende punktierte CW-Räume (X, x_0) zusammen mit Gruppenhomomorphismen $\pi_1(X, x_0) \to H$ und deren Morphismen Homotopieklassen von Abbildungen $g\colon (X, x_0) \to (X', x_0')$, so daß*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{g_\#} & \pi_1(Y, y_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & = & H \end{array}$$

kommutiert, sind, der einem Prinzipalbündel über (X, x_0) eben diesen Raum zusammen mit der von einer E klassifizierenden Abbildung $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induzierten Abbildung $f_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \cong H$ und einem Bündelmorphismus die zugehörige Abbildung zwischen den Basisräumen zuordnet, und dieser Funktor ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Der Funktor F ist in der Behauptung bereits definiert, es ist zunächst zu zeigen, daß er dies eindeutig und wohl ist. Nach Proposition 1.1.15 existiert bis auf Homotopie genau eine klassifizierende Abbildung f. Sei nun E ein von $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ klassifiziertes Bündel und E' ein von $f'\colon (X', x_0') \to (Y, y_0)$ klassifiziertes. Existiert ein Morphismus $E \to E'$ über $g\colon (X, x_0) \to (X', x_0')$, so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{g_\#} & \pi_1(X', x_0') \\ \downarrow{\scriptstyle f_\#} & & \downarrow{\scriptstyle f'_\#} \\ \pi_1(Y, y_0) & = & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

nach Korollar 1.1.16 tatsächlich. Um zu zeigen, daß F eine Äquivalenz ist, prüfen wir die Kriterien aus Lemma 1.1.1 nach. Da wir bereits in Proposition 1.1.15 gesehen haben, daß wir auf Objektebene einen zu F rechtsinversen Funktor erhalten, indem wir einem Raum (X, x_0) zusammen mit einem Homomorphismus $\varphi\colon \pi_1(X, x_0) \to H \cong \pi_1(Y, y_0)$ das Bündel

$\tilde{X} \times_\varphi \pi_1(Y, y_0)$ zuordnen, betrachten wir weiter die Morphismen. Wieder aus Korollar 1.1.16 folgt, daß F dort surjektiv ist. Die Injektivität folgt aus Proposition 1.1.17. $\square$

Axiome für Homologie

1.2.3. Definition. Eine Homologietheorie mit lokalen Koeffizienten ist ein kovarianter Funktor H von der Kategorie der Raumpaare mit Koeffizienten in die Kategorie der gradierten abelschen Gruppen mit Homomorphismen vom Grad 0, zusammen mit einer natürlichen Transformation von Funktoren

$$\mathfrak{d} : H_p(X, A; E) \to H_{p-1}(A; E|_A),$$

so daß die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) Ist $f \simeq g$, so ist $f_* = g_*$.

(ii) Für die Inklusionen $i : A \to X$ und $j : X \to (X, A)$ ist die Sequenz

$$\xrightarrow{\mathfrak{d}} H_p(A; E) \xrightarrow{i_*} H_p(X; E) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A; E) \xrightarrow{\mathfrak{d}} H_{p-1}(A; E) \xrightarrow{i_*}$$

exakt, wobei $H_*(X; E)$ für $H_*(X, \emptyset; E)$ und $H_*(A; E)$ für $H_*(A; E|_A)$ steht.

(iii) Ist (X, A) ein Paar und $U \subset X$ offen mit $\overline{U} \subset \operatorname{int} A$, $k : (X - U, A - U) \to (X, A)$ die Inklusion, dann ist k_* ein Isomorphismus.

(iv) Ist P ein einpunktiger Raum, E ein $\operatorname{Aut}(G)$-Prinzipalbündel über P, so ist $H_q(P; E) = 0$ für $q \neq 0$, und es existiert ein Isomorphismus abelscher Gruppen

$$\varphi : H_0(P; E) \to E \times_{\operatorname{Aut}(G)} G,$$

so daß für jeden Morphismus $f : E \to E$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_0(P; E) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_*"] & E \times_{\operatorname{Aut}(G)} G \arrow[d, "{[x,g] \mapsto [f(x),g]}"] \\ H_0(P; E) \arrow[r, "\varphi"] & E \times_{\operatorname{Aut}(G)} G \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(v) Ist $X = \coprod_\alpha X_\alpha$ eine toplogische Summe mit Inklusionen i_α, so ist $\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_* : \bigoplus H_*(X_\alpha) \to H_*(X)$ ein Isomorphismus.

Für jede abelsche Gruppe G ist die Kategorie der topologischen Räume in die der Räume mit Koeffizienten in G eingebettet, indem man einen Raum X auf $X \times \mathrm{Aut}(G)$ und eine Abbildung $f : X \to Y$ auf $f \times \mathrm{id}_{\mathrm{Aut}(G)}$ abbildet. Auf diese Unterkategorie eingeschränkt ergeben die obigen Axiome gerade die üblichen, so daß wir für konstante Koeffizienten alles benutzen dürfen, von dem wir wissen, daß es für gewöhnliche Homologie aus den Axiomen folgt. Wir haben also, daß

$$H_k(D^n, \partial D^n; G) \cong \begin{cases} G, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Das genügt aber noch nicht für alle Belange. Daher fixieren wir für jedes $n \geq 0$ noch einen Basispunkt in ∂D^{n+1} und einen Homöomorphismus $h \colon (D^n/\partial D^n, *) \to (\partial D^{n+1}, *)$.[7] Wir wissen dann, daß für alle k die Komposition

$$H_{k+1}(D^{n+1}, \partial D^{n+1}; G) \xrightarrow{\partial} H_k(\partial D^{n+1}; G) \xrightarrow{i_*} H_k(\partial D^{n+1}, *; G)$$

ein Isomorphismus ist, wie auch alle Abbildungen in

$$H_k(D^n, \partial D^n; G) \xrightarrow{c_*} H_k(D^n/\partial D^n, *; G) \xrightarrow{h_*} H_k(\partial D^{n+1}, *; G),$$

wobei c die Quotientenabbildung (den Kollaps) bezeichnet. Der sich daraus ergebende Isomorphismus

$$H_{n+1}(D^{n+1}, \partial D^{n+1}; G) \to H_n(D^n, \partial D^n; G)$$

setzt sich also aus der Randabbildung und Homomorphismen, die von Abbildungen zwischen den Basisräumen der (trivialen) $\mathrm{Aut}(G)$-Bündel, die die Faser identisch abbilden, induziert sind. Die Randabbildung kommutiert mit allen von Abbildungen induzierten Morphismen, und die Abbildungen der Basisräume mit Abbildungen der Faser, die die Basisräume identisch abbilden. Damit ergibt sich:

1.2.4. Proposition. *Für die oben beschriebenen Isomorphismen und*

$$\begin{aligned} L_h : \mathrm{Aut}(G) &\to \mathrm{Aut}(G) \\ g &\mapsto hg \end{aligned}$$

kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(D^{n+1}, \partial D^{n+1}; G) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_{D^{n+1}} \times L_h)_*"] & H_n(D^n, \partial D^n; G) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_{D^n} \times L_h)_*"] & \cdots \arrow[r, "\cong"] & H_0(D^0, \partial D^0; G) \arrow[d, "(\mathrm{id}_{D^0} \times L_h)_*"] \\
H_{n+1}(D^{n+1}, \partial D^{n+1}; G) \arrow[r, "\cong"] & H_n(D^n, \partial D^n; G) \arrow[r, "\cong"] & \cdots \arrow[r, "\cong"] & H_0(D^0, \partial D^0; G).
\end{tikzcd}$$

[7] Da ∂D^0 leer ist, ist $D^0/\partial D^0$ als D^0 plus einem Punkt, der dann auch Basispunkt ist, zu verstehen.

Identifiziert man in dem von Axiom (iv) gegebenen kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_0(D^0, \mathfrak{d}D^0; G) & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{Aut}(G) \times_{\operatorname{Aut}(G)} G \\ \big\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}_{D^0} \times L_h)_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle [a,g] \mapsto [ha,g]} \\ H_0(D^0, \mathfrak{d}D^0; G) & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{Aut}(G) \times_{\operatorname{Aut}(G)} G \end{array}$$

$\operatorname{Aut}(G) \times_{\operatorname{Aut}(G)} G$ *via* $[a, g] \mapsto a(g)$ *mit* G*, so beschreibt der rechte Pfeil gerade* h*.* □

Wo Zellen sind, sind auch Komplexe nicht weit ...

Homologie von CW-Räumen

Ich zeige nun, daß aus den Axiomen folgt, daß sich die Homologie eines CW-Raumes ähnlich wie im Fall konstanter Koeffizienten berechnet. Dies geschieht einerseits, um die Axiome zu rechtfertigen, andererseits, um die Definition der singulären Homologie mit lokalen Koeffizienten zu motivieren. Für letztere ließen sich die Ergebnisse dieses Abschnitts auch leicht direkt zeigen. Es sei K ein CW-Komplex, Σ_n die Menge der n-Zellen und für $\sigma \in \Sigma_n$ sei $f_\sigma : D^n \to K$ die charakteristische Abbildung. Ist E ein G-Koeffizientensystem auf K, so findet man wie gewohnt, daß

$$\bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} (f_\sigma)_* \colon \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} H_*(D^n, \mathfrak{d}D^n; f_\sigma^* E) \xrightarrow{\cong} H_*(K^{(n)}, K^{(n-1)}; E).$$

Da D^n ein einfach zusammenhängender CW-Raum ist, ist jedes Koeffizientensystem über D^n trivial und man erhält, daß

$$H_k(D^n, \mathfrak{d}D^n; f_\sigma^* E) \cong \begin{cases} G, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

insbesondere also $H_k(K^{(n)}, K^{(n-1)}; E) = 0$ für $k \neq n$. Außerdem erhält man wie in [2, App. A], daß die kanonische Abbildung

$$\varinjlim{}_n H_*(K^{(n)}; E) \to H_*(K; E)$$

ein Isomorphismus ist. Die Filtrierung ist also, was in [3, V.1] zellulär genannt wird,[8] und wie dort folgt, daß die Homologie des Komplexes $(C_*, \mathfrak{d})$ mit

$$C_n := H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)}; E)$$

[8]Dort wird nur singuläre Homologie betrachtet, so daß die Limesbedingung auf Kettenniveau formuliert ist.

und

$$\begin{array}{ccccc} C_n & & \xrightarrow{\qquad\qquad\mathfrak{d}\qquad\qquad} & & C_{n-1} \\ \| & & & & \| \\ H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)}; E) & \xrightarrow{\mathfrak{d}} & H_{n-1}(K^{(n-1)}; E) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(K^{(n-1)}, K^{(n-2)}; E) \end{array}$$

kommutierend natürlich (bezüglich zellulärer Abbildungen zwischen CW-Komplexen, das heißt solcher, die das n-Skelett auf das n-Skelett abbilden) isomorph zu $H_*(K; E)$ ist.

Wir wissen bereits, daß $C_n \cong \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n} G$, kennen aber $\mathfrak{d}$ noch nicht. Für den Fall konstanter Koeffizienten ist bekannt, wie sich die Randabbildung aus Abbildungsgraden gewisser Abbildungen zwischen Sphären ergibt. Um den allgemeinen Fall darauf zurückzuführen sei $\tilde{K}$ ein H-Prinzipalbündel über K für eine diskrete Gruppe H und $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ eine Abbildung, so daß $E \cong \tilde{K} \times_\varphi \mathrm{Aut}(G)$. Zum Beispiel kann man $\tilde{K} = E$, $H = \mathrm{Aut}(G)$ und $\varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{Aut}(A)}$ wählen. Die Projektionsabbildung $\pi : \tilde{K} \times \mathrm{Aut}(G) \to \tilde{K} \times_\varphi \mathrm{Aut}(G)$ ist ein Morphismus von $\mathrm{Aut}(G)$-Prinzipalbündeln über der Abbildung $\tilde{K} \to K$. Es sei nun $\tilde{\Sigma}_n$ die Menge der n-Zellen von $\tilde{K}$, so daß die charakteristische Abbildung f_σ für $\sigma \in \tilde{\Sigma}_n$ die Hochhebung einer Abbildung $f_{\sigma'}$, $\sigma' \in \Sigma_n$ ist. Es ist also

$$\bigoplus_{\sigma \in \tilde{\Sigma}_n} (f_\sigma)_* \colon \bigoplus_{\sigma \in \tilde{\Sigma}_n} H_*(D^n, \mathfrak{d}D^n; G) \xrightarrow{\cong} H_*(\tilde{K}^{(n)}, \tilde{K}^{(n-1)}; G).$$

Zu $\sigma \in \tilde{\Sigma}_n$ und $h \in H$ gibt es genau ein $\sigma' \in \tilde{\Sigma}_n$ mit $f_{\sigma'}(x) = f_\sigma(x) \cdot h$. Dieses bezeichnen wir mit $\sigma \cdot h$, so daß H von rechts auf $\tilde{\Sigma}_n$ operiert.

$(\tilde{C}_*, \mathfrak{d})$ sei entsprechend $(C_*, \mathfrak{d})$ definiert, dann induziert π eine Kettenabbildung $\pi_* : \tilde{C}_* \to C_*$. π_* ist surjektiv und daher $(C_*, \mathfrak{d}) \cong (\tilde{C}_*, \mathfrak{d}) / \operatorname{Ker} \pi_*$. Man erkennt, daß $\operatorname{Ker} \pi_*$ von Elementen der Form

$$(f_{\sigma \cdot h})_*(g) - (f_\sigma)_*((\pi \circ f_\sigma)_*^{-1}((\pi \circ f_{\sigma \cdot h})_*(g))),$$

$g \in H_n(D^n, \mathfrak{d}D^n)$, erzeugt wird. Es ist aber

$$\pi \circ (f_{\sigma \cdot h} \times \mathrm{id}_{\mathrm{Aut}(G)}) = \pi \circ (f_\sigma \times L_{\varphi(h)}),$$

und nach Proposition 1.2.4 erhält man bei geeigneter Identifikation von $H_n(D^n, \mathfrak{d}D^n; G)$ mit G daraus, daß

$$\pi_*((f_{\sigma \cdot h})_*(g)) = \pi_*((f_\sigma)_*(\varphi(h)(g))).$$

Damit wird $\operatorname{Ker} \pi_*$ von allen Elementen der Form

$$(f_{\sigma \cdot h})_*(g) - (f_\sigma)_*(\varphi(h)(g))$$

erzeugt. Nun ist aber auch die Randabbildung in $\tilde{C}$ von besonders einfacher Natur, nämlich

$$\mathfrak{d}((f_\sigma)_*(g)) = \sum_{\tau \in \tilde{\Sigma}_{n-1}} [\sigma : \tau](f_\tau)_*(g),$$

wobei die $[\sigma : \tau]$ ganze Zahlen und unabhängig von der Gruppe G sind.[9] Schreibt man nun der Deutlichkeit halber $\tilde{C}_*^G$ für den Komplex mit Koeffizienten in G, so heißt das gerade, daß

$$\tilde{C}_*^G \cong \tilde{C}_*^{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} G$$

als Kettenkomplex. Faktorisiert man nun nach $\operatorname{Ker} \pi_*$, so erhält man

$$C_* \cong \tilde{C}_*^{\mathbb{Z}} \otimes_\varphi G.$$

Dabei bedeute $\otimes_\varphi$ das Tensorprodukt als H-Moduln, wobei G durch φ zu einem Links-H-Modul wird. Ein Modul über einer Gruppe H ist einfach ein Modul über dem Gruppenring $\mathbb{Z}H$, siehe dazu zum Beispiel [5, VI.1].

1.2.5. Beispiel. Wir betrachten $\mathbb{R}P^n$, den n-dimensionalen reellen projektiven Raum. Die Überlagerung $S^n \to \mathbb{R}P^n$ kann als $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z})$-Prinzipalbündel gesehen werden. Wir bestimmen nun $H_*(\mathbb{R}P^n; S^n)$ mit Hilfe der üblichen Zerlegung von $\mathbb{R}P^n$ mit einer Zelle pro Dimension. Diese entsteht aus der Zerlegung von S^n in $D_+^0, D_-^0, \ldots, D_+^n, D_-^n$. Es sei $\tilde{C}_*$ der zelluläre Komplex zu dieser Zerlegung von S^n. Orientiert man die $D_\pm^k$ geeignet und bezeichnet die zugehörigen Ketten ebenfalls mit $D_\pm^k$, so ist

$$\mathfrak{d}D_+^{k+1} = \mathfrak{d}D_-^{k+1} = D_+^k - D_-^k \quad 0 \le k < n,$$

und wenn τ das nicht triviale Element aus $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z})$ bezeichnet, so operiert es als Antipodenabbildung, das heißt

$$D_\pm^k \cdot \tau = (-1)^k D_\mp^k.$$

$\tilde{C}_* \otimes_{\operatorname{Aut}(\mathbb{Z})} \mathbb{Z}$ wird nun in Dimension k, $0 \le k \le n$ von $D_+^k \otimes 1$ frei erzeugt, und es ist für $0 \le k < n$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}(D_+^{k+1} \otimes 1) &= (D_+^k - D_-^k) \otimes 1 = (D_+^k + (-1)^{k+1} D_+^k \cdot \tau) \otimes 1 \\
&= D_+^k \otimes (1 + (-1)^{k+1}(\tau \cdot 1)) = D_+^k \otimes (1 + (-1)^{k+1}(-1)) \\
&= \begin{cases} 2(D_+^k \otimes 1), & k \text{ gerade}, \\ 0, & k \text{ ungerade}. \end{cases}
\end{aligned}$$

[9] Dazu müssen die Identifikationen der verschiedenen $H_n(D^n, \mathfrak{d}D^n; G)$ mit G in gewisser Weise miteinander verträglich sein, die in Proposition 1.2.4 betrachteten Homöomorphismen sind aber gerade so konstruiert, daß dies gilt.

Damit ist für $n > 0$

$$H_k(\mathbb{R}P^n; S^n) \cong \begin{cases} 0, & k > n, \\ 0, & 0 < k \leq n,\ k \text{ ungerade}, \\ \mathbb{Z}, & k = n,\ k \text{ gerade}, \\ \mathbb{Z}_2, & 0 < k < n,\ k \text{ gerade}, \\ \mathbb{Z}_2, & k = 0. \end{cases}$$

Insbesondere ist also $H_n(\mathbb{R}P^n; S^n) \cong \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $\mathbb{R}P^n$ nicht orientierbar ist, im Gegensatz zu $H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, was ja genau dann gilt, wenn $\mathbb{R}P^n$ orientierbar ist. Im Abschnitt über Mannigfaltigkeiten wird der Grund hierfür klar werden.

Singuläre Homologie

Nun sollte kein Zweifel mehr daran bestehen, wie singuläre Homologie mit lokalen Koeffizienten zu definieren ist.

1.2.6. Definition (Singuläre Homologie). Es sei $(X, A; E)$ ein Paar mit Koeffizienten in G. Jedes Element von $\mathrm{Aut}(G)$ gibt einen Homöomorphismus von $(E, E|_A)$ und damit einen Kettenisomorphismus des singulären Komplexes $\Delta_*(E, E|_A)$. Dies macht $\Delta_*(E, E|_A)$ zu einem Rechts-$\mathrm{Aut}(G)$-Kettenkomplex. Da sich jeder singuläre Simplex in X mit beliebig vorgegebenem Anfangspunkt auf genau eine Weise hocheben läßt,[10] ist $\Delta_n(E, E|_A)$ freier $\mathrm{Aut}(G)$-Modul über den singulären n-Simplices in X, die nicht ganz in A liegen. Ist $f\colon (X, A; E) \to (X', A'; E')$ ein Morphismus, so ist die induzierte Abbildung $f_\Delta\colon \Delta_*(E, E|_A) \to \Delta_*(E', E'|_{A'})$ eine $\mathrm{Aut}(G)$-Kettenabbildung. Wir haben also soeben einen Funktor von der Kategorie der Paare mit Koeffizienten in G in die Kategorie der Kettenkomplexe freier $\mathrm{Aut}(G)$-Rechts-Moduln beschrieben.

Wir definieren nun

$$\Delta_*(X, A; E) := \Delta_*(E, E|A) \otimes_{\mathrm{Aut}(G)} G$$

und

$$H_*(A, X; E) := H(\Delta_*(A, X; E)).$$

Da

$$0 \to \Delta_*(E|_A) \to \Delta_*(E) \to \Delta_*(E, E|_A) \to 0$$

[10] Solche Hochhebungen entsprechen Schnitten des auf das Standardsimplex zurückgezogenen Bündels, und diese sind alle trivial, da das Standardsimplex parakompakt und zusammenziehbar ist.

eine kurze exakte Sequenz freier Moduln ist, ist auch

$$0 \to \Delta_*(A; E) \to \Delta_*(X; E) \to \Delta_*(X, A; E) \to 0$$

exakt, und wir können wie üblich $\mathfrak{d} : H_n(X, A; E) \to H_{n-1}(A; E)$ als den verbindenden Homomorphismus der zugehörigen langen exakten Sequenz definieren.

1.2.7. Proposition. *Singuläre Homologie mit lokalen Koeffizienten erfüllt die Axiome.*

Beweis. Axiome (ii), (iv) und (v) sind klar. Der Einfachheit halber betrachte ich im folgenden nur absolute Homologiegruppen. Seien $f_0, f_1 : E \to E'$ Morphismen und $F : I \times E \to E$ eine Homotopie zwischen ihnen. Bekanntlich ist $D : \Delta_n(E) \to \Delta_{n+1}(E')$ mit $D\sigma = F_\Delta(\mathrm{id}_I \times \sigma)$, wobei $\times$ das Kreuzprodukt (auf Kettenebene, also eine Eilenberg-Zilber-Abbildung) bezeichnet, eine Kettenhomotopie zwischen $f_{0\Delta}$ und $f_{1\Delta}$. Es ist noch zu zeigen, daß D Homomorphismus von $\mathrm{Aut}(G)$-Komplexen ist. Jedes Element von $\mathrm{Aut}(G)$ operiert als Homöomorphismus auf E und das Kreuzprodukt ist natürlich. Damit ist (i) gezeigt. Sei nun $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von X, $\mathfrak{V} = \{p^{-1}[U] : U \in \mathfrak{U}\}$ die entsprechende Überdeckung von E und $\Delta_*^{\mathfrak{V}}(E)$ der von den $\mathfrak{V}$-kleinen Simplices erzeugte Unterkomplex von $\Delta_*(E)$. Die Inklusion $i : \Delta_*^{\mathfrak{V}}(E) \to \Delta_*(E)$ ist nach [13, 4.4.14] eine Kettenäquivalenz. In die Konstruktion im dortigen Beweis gehen außer natürlichen Abbildungen nur ganze Zahlen ein, die angeben, wie oft ein Simplex unterteilt werden muß, um $\mathfrak{V}$-klein zu werden. Da die Elemente von $\mathfrak{V}$ invariant unter der Gruppenoperation sind, sind dies auch diese ganzen Zahlen. Damit ist i auch Kettenäquivalenz zwischen $\mathrm{Aut}(G)$-Kettenkomplexen. Dies zeigt Axiom (iii) und außerdem direkt die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz. $\square$

Kohomologie und Produkte

Singuläre Kohomologie wird nun wie Homologie, nur mit Hom anstelle des Tensorprodukts, definiert, das heißt

$$\Delta^*(X; E) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}(G)}(\Delta_*(E), G),$$

wobei $\mathrm{Aut}(G)$ durch $(g, a) \mapsto a^{-1}(g)$ von rechts auf G operiere. Alles weitere definiert man dann wie üblich.

Bei der Besprechung von Produkten, werde ich mich zwecks Vereinfachung der Notation darauf beschränken, die absoluten Fälle darzustellen. Ist H eine Gruppe, C ein Rechts-H-Kettenkomplex, G ein Rechts-H-Modul und C', H', G' entsprechend, so erhält man aus dem algebraischen Modell

$$\mathrm{Hom}_H(C, G) \otimes \mathrm{Hom}_{H'}(C', G') \to \mathrm{Hom}_{H \times H'}(C \otimes D, G \otimes G')$$

und der Kettenäquivalenz

$$\Delta_*(E \times E') \simeq \Delta_*(E) \otimes \Delta_*(E'),$$

die aufgrund ihrer Natürlichkeit Äquivalenz von $\mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G')$-Kettenkomplexen ist, ein Kreuzprodukt

$$\Delta^*(X;E) \otimes \Delta^*(X';E') \xrightarrow{\times} \Delta^*(X \times X'; E \otimes E').$$

Dabei steht $\Delta^*(X \times X'; E \otimes E')$ für $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}(G)\times\mathrm{Aut}(G')}(\Delta_*(E \times E'), G \otimes G')$. Um die Notation konsistent zu machen, setzt man also

$$E \otimes E' := (E \times E') \times_{\mathrm{Aut}(G)\times\mathrm{Aut}(G')} \mathrm{Aut}(G \otimes G'),$$

wobei $\mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G')$ durch $(f,g) \mapsto f \otimes g$ nach $\mathrm{Aut}(G \otimes G')$ abgebildet wird.

Für $X = X'$ erhält man mit der Diagonalabbildung $d : X \to X \times X$ dann ein Cup-Produkt

$$\Delta^*(X;E) \otimes \Delta^*(X;E') \xrightarrow{\smile} \Delta^*(X; E \otimes E'),$$

wobei für $E \otimes E'$ eigentlich $d^*(E \otimes E')$ stehen sollte.

Sei nun C ein Links-H-Kettenkomplex, G ein Links-H-Modul, G' ein Rechts-H'-Modul und D sowohl Links-H'-Komplex, als auch Rechts-H-Komplex, so daß für die beiden Multiplikationen $h'(dh) = (h'd)h$ gilt. Die Abbildung

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_H(C,G) \otimes G' \otimes_{H'} D \otimes_H C \\
&\qquad \cong G' \otimes_{H'} D \otimes_H (\mathrm{Hom}_H(C,G) \otimes C) \\
&\qquad \to G' \otimes_{H'} D \otimes_H G,
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die H-Modulstruktur von C die Klammer zu einem H-Modul macht und der Pfeil die Auswertungsabbildung, die eine H-Kettenabbildung ist, bezeichnet, kann nun zur Definition eines Slant-Produktes, wobei allerdings die Koeffizientensysteme nicht beliebig sind, herangezogen werden. Wir werden stattdessen gleich zum Cap-Produkt voranschreiten. Dazu seien E und E' Koeffizienten über X. E fassen wir als Links-$\mathrm{Aut}(G)$-Raum auf. $d^*(E \times E')$ ist $\mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G')$-Raum, den wir auf diese Art mit einer $\mathrm{Aut}(G)$-Rechtsoperation und einer $\mathrm{Aut}(G')$-Linksoperation versehen. Damit haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned}
&\Delta^*(X;E) \otimes G' \otimes_{\mathrm{Aut}(G')} \Delta_*(d^*(E \times E')) \otimes_{\mathrm{Aut}(G)} \Delta_*(E) \\
&\quad \to G' \otimes_{\mathrm{Aut}(G')} \Delta_*(d^*(E \times E')) \otimes_{\mathrm{Aut}(G)} G \\
&\quad \cong \Delta_*(X; E \otimes E').
\end{aligned}$$

Sei nun $s : X \to E$ ein (unstetiger) Schnitt von $p : E \to X$, dann definiert

$$\begin{aligned} E' &\to d^*(E \times E') \times_{\mathrm{Aut}(G)} E \\ x &\mapsto [(s(p'(x)), x), s(p'(x))] \end{aligned}$$

eine $\mathrm{Aut}(G')$-Abbildung, die von der Wahl von s unabhängig ist und daher, und weil p lokal stetige Schnitte zuläßt, stetig ist. Die Eilenberg-Zilber-Kettenäquivalenz zusammen mit ihrer Natürlichlichkeit liefert eine Kettenäquivalenz

$$\Delta_*(d^*(E \times E') \times_{\mathrm{Aut}(G)} E) \simeq \Delta_*(d^*(E \times E')) \otimes_{\mathrm{Aut}(G)} \Delta_*(E).$$

All dies liefert uns nun ein Cap-Produkt

$$\Delta^*(X; E) \otimes \Delta_*(X; E') \xrightarrow{\frown} \Delta_*(C; E \otimes E').$$

Man sieht ohne Schwierigkeiten, daß alle diese Produkte Produkte in Kohomologie mit den üblichen Eigenschaften induzieren, und daß sie für konstante Koeffizienten mit den üblichen Produkten übereinstimmen.

Mannigfaltigkeiten

Wir erhalten nun als erste Belohnung unserer Mühen einen Dualitätssatz für Mannigfaltigkeiten, der die Fälle einer orientierbaren Mannigfaltigkeit und einer beliebigen Mannigfaltigkeit und Koeffizienten mit Charakteristik 2 auf ansprechende Art verallgemeinert.

Betrachten wir zunächst das Orientierungsbündel einer Mannigfaltigkeit. Ich folge dabei [2, VI.7]. Es seien M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und E Koeffizienten in G über M. Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset M$ hat man eine abelsche Gruppe $H_n(M, M - A; E)$ und für $B \subset A$ eine Restriktion $j_{B,A} : H_n(M, M - A; E) \to H_n(M, M - B; E)$. Außerdem hat man für $x \in A$ einen Homomorphismus

$$j_{x,A} : H_n(M, M - A; E) \to H_n(M, M - \{x\}; E) =: \Theta^E_x.$$

Dies nutzt man, um $\Theta^E := \bigcup_{x \in M} \Theta^E_x$ mit einer Topologie zu versehen.[11] $\Theta^{\mathbb{Z}}$ bezeichnen wir auch einfach mit Θ und nennen es das Orientierungsbündel der Mannigfaltigkeit M. Θ bestimmt bereits alle Θ^E, denn wir haben eine Kettenabbildung

$$\Delta_*(M, M - \overline{U}) \otimes \Gamma(\overline{U}, E \times_{\mathrm{Aut}(G)} G) \to \Delta_*(M, M - \overline{U}; E),$$

wobei Γ die abelsche Gruppe der Schnitte bezeichnet, indem man einen singulären Simplex $\sigma : \Delta^k \to M$, der $y \in \overline{U}$ als Bild eines Punktes $x \in \Delta^k$

[11] Da $H_*(M, M - \{x\}) = \varinjlim_U H_*(M, M - \overline{U})$, wobei U die durch Inklusion geordneten Umgebungen von x durchläuft, ist dies gerade der übliche Übergang von einer Prägarbe zu einer Garbe.

trifft, und einen Schnitt s mit $s(y) = [\tilde{y}, g]$ auf $[\tilde{\sigma}, g]$ abbildet, wobei $\tilde{\sigma}$ eine Hochhebung von σ mit $\tilde{\sigma}(x) = \tilde{y}$ ist. Diese Abbildung ist wohldefiniert und mit Restriktionen verträglich. Für eine ϵ-Kugel U innerhalb einer Karte induziert sie in Homologie einen Isomorphismus. Daraus folgt nun, daß $\Theta^E \cong \Theta \otimes (E \times_{\mathrm{Aut}(G)} G)$,[12] doch ist dies leider ein Konzept, daß wir nicht eingeführt haben. Bezeichnet jedoch Θ^1 den Unterraum der Erzeugenden in Θ, so ist dies eine zweifache Überlagerung, kann also als $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$-Prinzipalbündel aufgefaßt werden, so daß $\Theta \cong \Theta^1 \times_{\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})} \mathbb{Z}$. Mit der Notation des letzten Abschnitts ist dann $\Theta^E \cong (\Theta^1 \otimes E) \times_{\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}\otimes G)} (\mathbb{Z} \otimes G)$.

Für abgeschlossenes $A \subset M$ erhalten wir wie in [2] einen Homomorphismus

$$J_A : H_n(M, M - A; E) \to \Gamma_c(A, \Theta^E),$$

wobei Γ_c die Schnitte mit kompaktem Träger bezeichnet, durch $J_A(\alpha)(x) := j_{x,A}(\alpha)$. Mit Mayer-Vietoris- und Limes-Argumenten, die hier auch gültig sind, folgt dann aus dem Fall, daß A kompakt und konvex in einer euklidischen offenen Menge ist, und über einer solchen sind alle Koeffizientensysteme trivial, der folgende Satz.

1.2.8. Satz. *Sind M eine topologische n-Mannigfaltigkeit, E Koeffizienten über M, $A \subset M$ abgeschlossen, so ist $H_i(M, M - A; E) = 0$ für $i > n$ und $J_A : H_n(M, M - A; E) \to \Gamma_c(A, \Theta^E)$ ein Isomorphismus.* □

Insbesondere haben wir:

1.2.9. Korollar. *Ist A eine kompakte Teilmenge einer n-Mannigfaltigkeit M mit Orientierungsbündel Θ, so ist $H_n(M, M - A; \Theta^1) \cong \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wie wir bereits bemerkt haben, ist

$$\Theta^{\Theta^1} \cong (\Theta^1 \otimes \Theta^1) \times_{\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z})} (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}),$$

aber $\Theta^1 \otimes \Theta^1$ ist trivial, denn $1^2 = (-1)^2 = 1$. □

Mit Koeffizienten in Θ^1 haben wir also immer, auch für nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten, eine 'Orientierungsklasse' ϑ, das heißt ein erzeugendes Element von $H_n(M, M - A; \Theta^1) \cong \mathbb{Z}$.

Die Argumente, mit denen Poincaré-Alexander-Lefschetz-Dualität bewiesen wird, sind von gleichem Charakter, so daß auch dieser Beweis ohne Änderung übernommen werden kann.

1.2.10. Satz. *Sind M eine n-Mannigfaltigkeit, E ein Koeffizientensystem auf M, ϑ eine 'Orientierungsklasse' mit Koeffizienten im Orientierungsbündel Θ^1 und $K \supset L$ kompakte Teilmengen von M, so ist*

$$\frown \vartheta : \check{H}^p(K, L; E) \to H_{n-p}(M - L, M - K; \Theta^1 \otimes E)$$

[12] Dem entspricht in [2] die Diskussion vor Proposition 7.10, die eigentlich erst die dortige Bezeichnung $\Theta \otimes G$ für Θ^G rechtfertigt.

ein Isomorphismus. □

1.2.11. Bemerkung. Ist M orientierbar oder E ein Koffizientensystem mit Koeffizienten in einer Gruppe der Charakteristik 2, so ist $\Theta^1 \otimes E \cong E$.

Der Satz von KÜNNETH

Um KÜNNETH-Sätze für Homologie und Kohomologie mit lokalen Koeffizienten zu erhalten, erinnere ich zunächst an den algebraischen Satz von KÜNNETH.

1.2.12. Proposition. *Seien K und L freie Kettenkomplexe. Dann existiert eine in K und L natürliche kurze exakte Sequenz*

$$0 \to \bigoplus_k H_k(K) \otimes H_{n-k}(L) \to H_n(K \otimes L) \to \bigoplus_k H_k(K) * H_{n-1-k}(L) \to 0,$$

die (nicht natürlich) zerfällt, wobei die erste nicht triviale Abbildung die vom Tensorprodukt induzierte ist.

Beweis. [2, VI.1.5] □

1.2.13. Proposition. *Sei H eine Gruppe, C freier Rechts-H-Kettenkomplex, G Links-H-Modul und ebenso H', C', G'. Sind G und G' als abelsche Gruppen frei, so existiert eine in C und C' natürliche kurze exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 &\to \bigoplus_k H_k(C \otimes_H G) \otimes H_{n-k}(C' \otimes_{H'} G') \\ &\to H_n((C \otimes C') \otimes_{H \times H'} (G \otimes G')) \\ &\to \bigoplus_k H_k(C \otimes_H G) * H_{n-1-k}(C' \otimes_{H'} G') \to 0, \end{aligned}$$

die zerfällt.

Beweis. Dies folgt aus der vorhergehenden Proposition, wenn man bemerkt, daß $C \otimes_H G$ und $C' \otimes_{H'} G'$ frei sind, und $(C \otimes_H G) \otimes (C' \otimes_{H'} G')$ durch das isomorphe $(C \otimes C') \otimes_{H \times H'} (G \otimes G')$ ersetzt. □

1.2.14. Proposition. *Sei $(X; E)$ ein Raum mit Koeffizienten in G, $(X'; E')$ ein Raum mit Koeffizienten in G'. Dann existiert eine in $(X; E)$ und $(X'; E')$ natürliche kurze exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 &\to \bigoplus_k H_k(X; E) \otimes H_{n-k}(X'; E') \\ &\xrightarrow{\times} H_k(X \times X'; E \otimes E') \\ &\to \bigoplus_k H_k(X; E) * H_{n-1-k}(X'; E') \to 0, \end{aligned}$$

die zerfällt.

Beweis. Dies folgt mit $C = \Delta_*(E)$, $H = \mathrm{Aut}(G)$ *et cetera* und der Kettenäquivalenz $\Delta_*(E \times E') \simeq \Delta_*(E) \otimes \Delta_*(E')$ aus der vorhergehenden Proposition. □

1.2.15. Proposition. *Sei H eine Gruppe, C freier Rechts-H-Kettenkomplex, G Rechts-H-Modul und ebenso H', C', G'. Sind G und G' als abelsche Gruppen frei und C, C' von endlichem Typ und von unten beschränkt, so existiert eine in C und C' natürliche kurze exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 &\to \bigoplus_k H^k(\mathrm{Hom}_H(C,G)) \otimes H^{n-k}(\mathrm{Hom}_{H'}(C',G')) \\ &\xrightarrow{\times} H^n(\mathrm{Hom}_{H\times H'}(C \otimes C', G \otimes G')) \\ &\to \bigoplus_k H^k(\mathrm{Hom}_H(C,G)) * H^{n+1-k}(\mathrm{Hom}_{H'}(C',G')) \to 0 \end{aligned}$$

(mit $H^k = H_{-k}$), die zerfällt.

Beweis. Unter diesen Voraussetzungen ist die Kettenabbildung

$$\mathrm{Hom}_H(C,G) \otimes \mathrm{Hom}_{H'}(C',G') \to \mathrm{Hom}_{H\times H'}(C \otimes C', G \otimes G')$$

ein Isomorphismus. Außerdem sind $\mathrm{Hom}_H(C,G)$ und $\mathrm{Hom}_{H'}(C',G')$ frei. Damit folgt die Behauptung aus Proposition 1.2.12. □

1.2.16. Proposition. *Sei $(X;E)$ ein Raum mit Koeffizienten in G, $(X';E')$ ein Raum mit Koeffizienten in G'. Sind X und X' CW-Komplexe endlichen Typs (das heißt, mit nur endlich vielen Zellen in jeder Dimension), so existiert eine in $(X;E)$ und $(X';E')$ natürliche kurze exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 &\to \bigoplus_k H^k(X;E) \otimes H^{n-k}(X';E') \\ &\xrightarrow{\times} H^k(X \times X'; E \otimes E') \\ &\to \bigoplus_k H^k(X;E) * H^{n+1-k}(X';E') \to 0, \end{aligned}$$

die zerfällt.

Beweis. Dies folgt aus der vorhergehenden Proposition, wenn man für C und C' die zellulären Komplexe von E und E' setzt. Der zelluläre Komplex von $E \times E'$ ist dann isomorph zu $C \otimes C'$. □

Der WHITEHEADsche Lehrsatz

Die folgende Proposition ist eine Teilaussage des Satzes von WHITEHEAD [2, VII.11.2].

1.2.17. Proposition. *Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen wegzusammenhängenden Räumen und $n \geq 1$. Ist $f_\#\colon \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ für alle $k \leq n$ ein Isomorphismus, so auch $f_*\colon H_k(X) \to H_k(Y)$.*

Mit dem universellen Koeffizientensatz folgt dann, daß die Folgerung auch für Kohomologiegruppen und beliebige, aber konstante, Koeffizienten gilt. Zumindest für den Fall, daß X und Y CW-Räume sind, gilt dies auch für lokale Koeffizienten:

1.2.18. Proposition. *Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen wegzusammenhängenden CW-Räumen, E ein Koeffizientensystem auf Y und $n \geq 1$. Ist $f_\#\colon \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ für alle $k \leq n$ ein Isomorphismus, so auch $f_*\colon H_k(X; f^*E) \to H_k(Y; E)$ und $f^*\colon H^k(Y; E) \to H^k(X; f^*E)$.*

Beweis. Man konstruiert wie folgt durch Ankleben weiterer Zellen an X einen CW-Raum Y zusammen mit einer Abbildung $g\colon Z \to Y$, die f erweitert, so daß $g_\#$ für alle Homotopiegruppen ein Isomorphismus ist. Es sei eine 0-Zelle $x_0 \in X$ als Basispunkt gewählt und $y_0 := f(x_0)$. Sei $Z_n := X$ und $g_n := f$. Sind nun Z_l und $g_l\colon Z_l \to Y$ für ein $l \geq n$ bereits definiert, so daß X ein Unterkomplex von Z_l ist, g_l f fortsetzt und $(g_l)_\#\colon \pi_k(Z_l) \to \pi_k(Y_l)$ ein Isomorphismus für $k \leq l$ ist, so wollen wir Z_{l+1} und g_{l+1} mit eben diesen Eigenschaften definieren. Zunächst wählt man Abbildungen $h_\alpha\colon (D^{l+1}, S^l) \to (Y, y_0)$ deren Homotopieklassen zusammen mit $\mathrm{Im}((g_l)_\#\colon \pi_{l+1}(Z_l) \to \pi_{l+1}(Y))$ ganz $\pi_{l+1}(Y)$ erzeugen. Ist nun Z_l' der Raum, der aus Z_l entsteht, indem man für jedes α eine $(l+1)$-Zelle an x_0 anheftet und $g_l'\colon Z_l' \to Y$ die Abbildung, die auf Z_l durch g_l und auf der zu α gehörenden Zelle durch h_α gegeben ist, so haben Z_l' und g_l' die Eigenschaften, die wir für Z_l und g_l vorausgesetzt haben, und zusätzlich ist $(g_l')_\#\colon \pi_{l+1}(Z_l') \to \pi_{l+1}(Y)$ surjektiv. Nun wählt man neue Abbildungen $h_\alpha\colon S^{l+1} \to Z_l'$, die im $l+1$-Gerüst landen und deren Homotopieklassen $\mathrm{Ker}((g_l')\colon \pi_{l+1}(Z_l') \to \pi_{l+1}(Y))$ erzeugen. Sei nun Z_{l+1} der Raum der aus Z_l' durch Anheften von $(l+2)$-Zellen vermittels der Abbildungen h_α entsteht. Da $g_l' \circ h_\alpha$ für alle α nullhomotop ist, läßt sich g_l' zu einer Abbildung $g_{l+1}\colon Z_{l+1} \to Y$ fortsetzen. $\mathrm{Ker}((g_l')\colon \pi_{l+1}(Z_l') \to \pi_{l+1}(Y))$ ist bezüglich der Operation von $\pi_1(Z_l')$ abgeschlossen, da diese natürlich ist, denn ist $(g_l')_\#(\beta) = 0$ für $\beta \in \pi_{l+1}(Z_l')$, so ist für $\gamma \in \pi_1(Z_l')$ auch $(g_l')_\#(\gamma(\beta)) = ((g_l')_\#(\gamma))((g_l')_\#(\beta)) = ((g_l')_\#)(0) = 0$. Daher folgt aus Proposition 1.1.19, daß $(g_{l+1})_\#\colon \pi_k(Z_{l+1}) \to \pi_k(Y_{l+1})$ für alle $k \leq l+1$ ein Isomorphismus ist. Sei nun $Z = \varinjlim Z_l$ und $g = \varinjlim g_l$.

$g\colon Z \to Y$ ist eine Abbildung zwischen CW-Räumen, die zwischen allen Homotopieklassen Isomorphismen induziert, und damit eine Homotopieäquivalenz [2, VII.11.14]. Z ist aus X durch Anheften von Zellen der Dimension $n+1$ und höher hervorgegangen, und die neuen Zellen der Dimension $n+1$ haben nullhomotopen Rand. Damit induziert die Inklusion $i\colon X \to Z$ zwischen den zellulären Komplexen unabhängig vom Koeffizientensystem bis zu

Dimension n Isomorphismen in Homologie und Kohomologie. Da $f = g \circ i$, folgt die Behauptung. $\square$

1.3 Die (Ko)homologie einer Gruppe

Wegen Korollar 1.1.23 kann man einer Gruppe G eindeutig Homologiegruppen $H_*(G)$ durch $H_*(G) := H_*(K(G, 1))$ zuordnen. Entsprechend der Homologie mit lokalen Koeffizienten betrachtet man allgemeiner die folgende Kategorie.

1.3.1. Definition. Sei A eine abelsche Gruppe. Eine Gruppe mit Koeffizienten in A nenne ich eine Gruppe G zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $G \to \operatorname{Aut} A$. Ein Morphismus zwischen Gruppen mit Koeffizienten in A sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d] \\ \operatorname{Aut} A \arrow[r, equal] & \operatorname{Aut} A. \end{tikzcd}$$

1.3.2. Proposition. *Der Funktor π_1 ist eine Äquivalenz von der Kategorie der punktierten CW-Räumen (X, x_0) vom Typ $K(\pi, 1)$ zusammen mit Homomorphismen $\pi_1(X, x_0) \to \operatorname{Aut} A$ und Morphismen wie in Proposition 1.2.2 in die Kategorie der Gruppen mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe A.*

Beweis. Die Bedingungen aus Lemma 1.1.1 sind nach Proposition 1.1.20 und Proposition 1.1.21 erfüllt. $\square$

Damit übertragen sich mit Hilfe von Proposition 1.2.2 und Lemma 1.1.2 die Homologie- und Kohomologiefunktoren von der Kategorie der Räume mit Koeffizienten in die Kategorie der Gruppen mit Koeffizienten.

1.3.3. Bemerkung. Die Wahl der speziellen Homologie- und Kohomologietheorie ist nebensächlich, da die Funktoren auf der Kategorie der CW-Räume bereits durch die Axiome bestimmt sind. Man kann die Homologie und Kohomologie einer Gruppe auch rein algebraisch definieren. Sind nämlich G und $\varphi\colon G \to \operatorname{Aut} A$ gegeben und X ein Raum vom Typ $K(G, 1)$ mit universeller Überlagerung $\tilde{X}$, so ist $H_*(G; {}_\varphi A) = H(\Delta_*(X; \tilde{X} \times_\varphi \operatorname{Aut} A))$ und

$$\Delta_*(X; \tilde{X} \times_\varphi \operatorname{Aut} A) = \Delta_*(\tilde{X} \times_\varphi \operatorname{Aut} A) \otimes_{\operatorname{Aut} A} A \cong \Delta_*(\tilde{X}) \otimes_\varphi A.$$

Da $\tilde{X}$ zusammenziehbar ist, ist $H_i(\tilde{X}) = 0$ für $i \neq 0$ und $H_0(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}$. Da $\Delta_*(\tilde{X})$ ein Rechts-G-Kettenkomplex ist, sollte $H_0(\tilde{X})$ in diesem Zusammenhang als Rechts-G-Modul gesehen werden. Da er von der Klasse eines Punktes erzeugt wird, ein solcher unter der Operation von G wieder auf einen Punkt geht und alle Punkte die gleiche Klasse repräsentieren, ist es als solches trivial. $\Delta_*(\tilde{X})$ ist also eine freie azyklische Auflösung des trivialen Rechts-G-Moduls $\mathbb{Z}$. Das heißt, daß

$$H_n(G; {}_\varphi A) \cong H_n(\Delta_*(\tilde{X}) \otimes_\varphi A) \cong \mathrm{Tor}_n^G(\mathbb{Z}, A),$$

wobei A via φ als Links-G-Modul zu verstehen ist. Weiteres zum algrebraischen Zugang findet man zum Beispiel in [5, chap. VI].

1.4 Mehr über die Homologie von Mannigfaltigkeiten

Die Umkehrabbildung

1.4.1. Definition. Es seien N^n und M^m kompakte Mannigfaltigkeiten mit Rand mit Orientierungsbündeln Θ_N und Θ_M und 'Orientierungsklassen' $[N] \in H_n(N, \mathfrak{d}N; \Theta_N)$ und $[M] \in H_m(M, \mathfrak{d}M; \Theta_M)$. Zu jeder Abbildung $f\colon N \to M$ und jedem Koeffizientensystem E auf M sei dann

$$f_!\colon H_k(M, \mathfrak{d}M; E \otimes \Theta_M) \to H_{k+n-m}(N, \mathfrak{d}N; f^*E \otimes \Theta_N)$$

die Abbildung, die

$$\begin{tikzcd}
H^{m-k}(N; f^*E) \arrow[d, "\frown [N]", "\cong"'] & H^{m-k}(M; E) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "\frown [M]", "\cong"'] \\
H_{k+n-m}(N, \mathfrak{d}N; f^*E \otimes \Theta_N) & H_k(M, \mathfrak{d}M; E \otimes \Theta_M) \arrow[l, "f_!"']
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Wir werden nun untersuchen, wie man in bestimmten Situationen die Umkehrabbildung aus 'geometrischen' Informationen bestimmen kann. Die Darstellung der Transferabbildung und des THOM-Isomorphismus folgt eher [3, VIII.11] als [2, VI.11]. Man beachte, daß die Vorzeichen nicht einheitlich sind.

Es sei M^m eine kompakte pl-Mannigfaltigkeit mit Rand, N^n eine abgeschlossene pl-Untermannigfaltigkeit mit Rand, so daß $\mathfrak{d}N = N \cap \mathfrak{d}M$, $e\colon N \to M$ die Einbettung.

Sei W eine reguläre Umgebung von N in M. Die Inklusion $j\colon (N, \mathfrak{d}N) \to (W, W \cap \mathfrak{d}M)$ ist eine Homotopieäquivalenz. Außerdem ist W eine abgeschlossene pl-Untermannigfaltigkeit der Dimension m von M [9, 3.10]. $W \cap \mathfrak{d}M$ ist eine reguläre Umgebung von $\mathfrak{d}N$ in $\mathfrak{d}M$ und daher ebenso eine Mannigfaltigkeit, also auch $S := \overline{\mathfrak{d}W - (W \cap \mathfrak{d}M)}$ [9, 3.14]. r bezeichne die Komposition $H_m(M, \mathfrak{d}M) \to H_m(M, M - iW) \xleftarrow{\cong} H_m(W, \mathfrak{d}W)$ mit beliebigen Koeffizienten (die zweite Abbildung ist ein Ausschneidungsisomorphismus).

Weiterhin sei die Einschränkung des Orientierungsbündels Θ von M auf N auch dessen Orientierungsbündel, das heißt, zu ihm vermöge eines fest gewählten und in der Notation unterdrückten Isomorphismus isomorph. Ich werde am Ende andeuten, wie in der Abwesenheit dieser Voraussetzung vorzugehen wäre. Es seien Orientierungsklassen $[N] \in H_n(N, \mathfrak{d}N; \Theta)$ und $[M] \in H_m(M, \mathfrak{d}M; \Theta)$ gewählt. $[W]$ sei $r([M])$.

Die THOM-Klasse τ und die transversale Klasse ν

Da $\frown [W]\colon H^k(W, S; \Theta) \to H_{m-k}(W, W \cap \mathfrak{d}M; \Theta)$ ein Isomorphismus ist,[13] ist die folgende Definition sinnvoll.

1.4.2. Definition. Es sei $\tau \in H^{m-n}(W, S)$ gegeben durch

$$\tau \frown [W] = j_*[N].$$

1.4.3. Proposition. *Für* $\alpha \in H_*(M, \mathfrak{d}M; E \otimes \Theta)$ *ist*

$$j_*(e_!\alpha) = (-1)^{(m-n)(m-|\alpha|)}\tau \frown r(\alpha).$$

Beweis. Sei $\alpha = \gamma \frown [M]$, $\gamma \in H^*(M; E)$, dann ist

$$\begin{aligned} j_*(e_!\alpha) &= j_*(e_!(\gamma \frown [M])) = j_*(\gamma \frown [N]) = \gamma \frown (\tau \frown [W]) \\ &= (\gamma \smile \tau) \frown [W] = (-1)^{(m-n)|\gamma|}\tau \frown (\gamma \frown [W]) \\ &= (-1)^{(m-n)(m-|\alpha|)}\tau \frown r(\alpha). \end{aligned}$$

□

1.4.4. Proposition. $\tau \frown\colon H_{m-n}(W, S) \to H_0(W)$ *ist ein Isomorphismus und damit auch* $\langle \tau, \bullet \rangle\colon H_{m-n}(W, S) \to \mathbb{Z}$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} H_{m-n}(W, S) &\cong H_{m-n}(W, S; \Theta \otimes \Theta) \\ &\xleftarrow[\cong]{\frown [W]} H^n(W, W - \mathfrak{d}M; \Theta) \\ &\cong H^n(N, \mathfrak{d}N; \Theta) \\ &\xrightarrow[\cong]{\frown [N]} H_0(N; \Theta \otimes \Theta) \\ &\cong H_0(N) \cong H_0(W), \end{aligned}$$

und wie oben stimmt dieser Isomorphismus bis aufs Vorzeichen mit $\tau \frown$ überein. □

1.4.5. Definition. Es sei $\nu \in H_{m-n}(W, S)$ der durch $\langle \tau, \nu \rangle = (-1)^{(m-n)n}$ gegebene Erzeuger.

[13] Das ist wie in [2, VI.9, Problem 3] zu beweisen.

1.4.6. Proposition. *Sei $D := D^{m-n}$, $f\colon (D^k \times D, D^k \times \mathfrak{d}D) \to (W, S)$, $[D^k] \in H_k(D^k, \mathfrak{d}D^k)$ und $[D] \in H_{m-n}(D, \mathfrak{d}D)$ Orientierungsklassen, so daß für ein $p \in D^k$ $f_*(p \times [D]) = s\nu$, dann ist $f^*(\tau) \frown ([D^k] \times [D]) = s(-1)^{(m-n)(k+n)}[D^k] \times q$ mit $q \in D$.*

Beweis. Da D^k azyklisch ist, ist $f^*(\tau) = 1 \times \tau'$ mit $\langle \tau', [D] \rangle = \langle 1 \times \tau', p \times [D] \rangle = \langle f^*(\tau), p \times [D] \rangle = \langle \tau, f_*(p \times [D]) \rangle = \langle \tau, r\nu \rangle = s(-1)^{(m-n)n}$. Dann ist aber $f^*(\tau) \frown ([D^k] \times [D]) = (1 \times \tau') \frown ([D^k] \times [D]) = (-1)^{(m-n)k}(1 \frown [D^k]) \times (\tau' \frown [D]) = (-1)^{(m-n)k}[D^k] \times (\langle \tau', [D] \rangle q)$. □

Um dies praktisch anwenden zu können, müssen wir wissen, wie wir ν erkennen.

Sei x ein Punkt im Inneren von N, so daß es eine Abbildung $h\colon (D^n \times D, D^n \times \mathfrak{d}D, p \times D) \to (W, S, N)$ mit $h(p, 0) = x$ gibt, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist. Man wähle einen Isomorphismus von $h^*\Theta$ mit dem trivialen Koeffizientenbündel. Man hat dann die Abbildungen

$$\begin{aligned} H_m(W, \mathfrak{d}W; \Theta) &\to H_m(h[D^n \times D], h[\mathfrak{d}(D^n \times D)]; \Theta) \\ &\leftarrow H_m(D^n \times D, \mathfrak{d}(D^n \times D)), \end{aligned}$$

die beide Isomorphismen sind; die erste, da sowohl W, als auch $h[D^n \times D]$ zusammenhängend sind. Vermittels ihrer bestimmt $[W]$ einen Erzeuger von $H_m(D^n \times D, \mathfrak{d}(D^n \times D))$. Ebenso bestimmt $[N]$ einen Erzeuger von $H_n(D^n, \mathfrak{d}D^n)$. Nun ist

$$H_n(D^n, \mathfrak{d}D^n) \otimes H_{m-n}(D, \mathfrak{d}D) \xrightarrow{\times} H_m(D^n \times D, \mathfrak{d}(D^n \times D))$$

ein Isomorphismus, so daß die Wahl von Erzeugern in zweien der Gruppen einen in der dritten bestimmt. Die Orientierungen von M und N geben also eine Orientierung von $h[\{p\} \times D]$. Dies ist unabhängig von der Wahl des Isomorphismus von $h^*\Theta$ mit dem trivialen Bündel, da sich bei anderer Wahl die Vorzeichen in $H_n(D^n, \mathfrak{d}D^n)$ *und* $H_m(D^n \times D, \mathfrak{d}(D^n \times D))$ ändern.

1.4.7. Proposition. *Ist in dieser Situation $[D^n] \in H_n(D^n, \mathfrak{d}D^n)$ ein Erzeuger, der mit $[N]$ koerrespondiert und $[D] \in H_{m-n}(D, \mathfrak{d}D)$ ein Erzeuger, so daß $[D^n] \times [D]$ mit $[W]$ korrespondiert, so ist $h_*(p \times [D]) = \nu$.*

Beweis. Man betrachtet die kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^{m-n}(W,S) \otimes H_m(W,\mathfrak{d}W;\Theta) \arrow[r, "\frown"] \arrow[d] & H_n(W, W \cap \mathfrak{d}M; \Theta) \arrow[d] \\
H^{m-n}(h[D^n \times D], h[D^n \times \mathfrak{d}D]) \otimes H_m(h[D^n \times D], h[\mathfrak{d}(D^n \times D]; \Theta) \arrow[r, "\frown"] & H_n(h[D^n \times D], h[\mathfrak{d}D^n \times D]; \Theta) \\
H^{m-n}(D^n \times D, D^n \times \mathfrak{d}D) \otimes H_m(D^n \times D, \mathfrak{d}(D^n \times D)) \arrow[r, "\frown"] \arrow[u, "(h^*)^{-1} \otimes h_*"] & H_n(D^n \times D, \mathfrak{d}D^n \times D) \arrow[u, "h_*"]
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
H_n(W,W\cap\partial M;\Theta) \arrow[d] & H_n(N,\partial N;\Theta) \arrow[l] \arrow[d] \\
H_n(h[D^n\times D],h[\partial D^n\times D];\Theta) & H_n(h[D^n],h[\partial D^n];\Theta) \arrow[l] \\
H_n(D^n\times D,\partial D^n\times D) \arrow[u, "h_*"] & H_n(D^n,\partial D^n), \arrow[l] \arrow[u, "h_*"]
\end{tikzcd}$$

die eigentlich nebeneinander zusammengefügt werden sollten. Die Abbildungen h_* (und auch alle anderen, aber das benötigen wir nicht) sind Isomorphismen. Nach Definition von τ gehen in der oberen Zeile $\tau \otimes [W]$ und $[N]$ auf das selbe Element. Es ist also $h^*(\tau) \frown ([D^n] \times [D]) = i_*[D^n] = [D^n] \times q$. Andererseits ist $h^*(\tau) \frown ([D^n] \times [D]) = s(-1)^{(m-n)(n+n)}[D^n] \times q = s[X] \times q$, wobei $h_*(p \times [D]) = s\nu$. Damit ist $s = 1$ und die Behauptung gezeigt. $\square$

Zerlegungen

Es seien nun $Y \subset X$ abgeschlossene Unterpolyeder von M, $\partial M \subset Y$. Dann sind auch

$$\begin{gathered}
H_*(X \cap W, X \cap \partial W) \to H_*(X, X - iW), \\
H_*(Y \cap W, Y \cap \partial W) \to H_*(Y, Y - iW), \\
H_*(X \cap W, Y \cap W \cup X \cap \partial W) \to H_*(X, Y \cup (X - iW))
\end{gathered}$$

Ausschneidungsisomorphismen. Die Abbildungen r in den folgenden zwei Lemmata seien Kompositionen der Inversen dieser Abbildungen mit von Inklusionen induzierten. Außerdem garantieren diese Ausschneidungseigenschaften die Existenz der Cap-Produkte.

1.4.8. Lemma. *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
H_*(M,\partial M) \arrow[d, "r"] & H_*(X,X\cap\partial M) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "r"] & H_*(X,Y) \arrow[d, "r"] \\
H_*(W,\partial W) \arrow[d, "\tau\frown"] & H_*(X\cap W,X\cap\partial W) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\tau\frown"] & H_*(X\cap W,Y\cap W\cup X\cap\partial W) \arrow[d, "\tau\frown"] \\
H_*(W,W\cap\partial M) & H_*(X\cap W,X\cap W\cap\partial M) \arrow[l] \arrow[r] & H_*(X\cap W,Y\cap W) \\
H_*(N,\partial N) \arrow[u, "j_*"] & H_*(X\cap N,X\cap\partial N) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & H_*(X\cap N,Y\cap N) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

kommutiert. $\square$

1.4.9. Lemma. *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
H_k(X,Y) \arrow[r, "\mathfrak{d}"] \arrow[d, "r"] & H_{k-1}(Y,\mathfrak{d}M) \arrow[d, "r"] \\
H_k(X\cap W, Y\cap W \cup X\cap\mathfrak{d}W) \arrow[r, "\mathfrak{d}"] \arrow[d, "\tau\frown"] & H_k(Y\cap W, Y\cap\mathfrak{d}W) \arrow[d, "(-1)^{(m-n)}\tau\frown"] \\
H_{k-m+n}(X\cap W, Y\cap W) \arrow[r, "\mathfrak{d}"] & H_{k-m+n-1}(Y\cap W, Y\cap W\cap\mathfrak{d}M) \\
H_{k-m+n}(X\cap N, Y\cap N) \arrow[r, "\mathfrak{d}"] \arrow[u] & H_{k-m+n-1}(Y\cap N, Y\cap\mathfrak{d}N) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

kommutiert. □

1.4.10. Definition. Für den Fall, daß $j\colon (X\cap N, X\cap\mathfrak{d}N) \to (X\cap W, X\cap W\cap\mathfrak{d}M)$ und $j\colon (X\cap N, Y\cap N) \to (X\cap W, Y\cap W)$ Isomorphismen in Homologie induzieren, definieren wir in Übereinstimmung mit Proposition 1.4.3 $e_!\colon H_*(X, X\cap\mathfrak{d}M) \to (X\cap N, X\cap\mathfrak{d}N)$ und $e_!\colon H_*(X,Y) \to (X\cap N, Y\cap N)$ durch $e_!\alpha := (-1)^{(m-n)(m-|\alpha|)} j_*^{-1}(\tau \frown r(\alpha))$.

1.4.11. Proposition. *Sei $\mathfrak{d}M = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \cdots$ eine zelluläre pl-Filtrierung*[14] *von M, so daß $N\cap X^{-1} \subset N\cap X^{m-n} \subset N\cap X^{m-n+1} \subset \cdots$ eine zelluläre pl-Filtrierung von N ist und $N\cap X^i \to W\cap X^i$ für jedes i einen Isomorphismus in Homologie induziert. Die Abbildungen $e_!\colon H_k(X^k, X^{k-1}) \to H_{k+n-m}(N\cap X^{k+n-m}, N\cap X^{k+n-m-1})$ bilden eine Kettenabbildung vom Grad $n-m$, das heißt $e_!\circ\mathfrak{d} = \mathfrak{d}\circ e_!$, die die Abbildung $e_!\colon H_*(M,\mathfrak{d}M) \to H_*(N,\mathfrak{d}N)$ induziert.*

Beweis. Zunächst ist zu bemerken, daß aus dem Fünferlemma folgt, daß auch $H_*(N\cap X^k, N\cap X^{k-1}) \to H_*(W\cap X^k, W\cap X^{k-1})$ ein Isomorphismus ist, was die Behauptung überhaupt erst sinnvoll macht. Aus Lemma 1.4.9 folgt, daß $e_!\colon H_k(X^k, X^{k-1}) \to H_{k+n-m}(N\cap X^{k+n-m}, N\cap X^{k+n-m-1})$ eine Kettenabbildung ist und daher eine Abbildung $H_*(M,\mathfrak{d}M) \to H_*(N,\mathfrak{d}N)$ induziert. Um zu sehen, daß dies $e_!$ ist, betrachtet man für ein $\alpha \in H_k(M,\mathfrak{d}M)$ Lemma 1.4.8 mit $X = X^k$ und $Y = X^{k-1}$. □

1.4.12. Proposition. *In der Situation von Proposition 1.4.6 sei $f\colon (D^k\times D, \mathfrak{d}(D^k\times D)) \to (X, Y\cup\mathfrak{d}W)$, $f[D^k\times\{q\}] \subset N$ und $g\colon D^k \to N$ die Abbildung, so daß $g(x) = f(x,q)$. Dann ist $e_!(f_*([D^k]\times[D])) = sg_*([D^k])$.*

---

[14]Das heißt, die Filtrierung sei zellulär im Sinne von [3, V.1], also zum Beispiel eine CW-Zerlegung, und jedes X^i abgeschlossener Unterpolyeder von X^{i+1} und M.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} e_!(f_*([D^k] \times [D])) &= (-1)^{(m-n)(m-(k+m-n))} j_*^{-1}(\tau \frown f_*([D^k] \times [D])) \\ &= (-1)^{(m-n)(k+n)} j_*^{-1}(f_*(f^*(\tau) \frown ([D^k] \times [D]))) \\ &= s j_*^{-1}(f_*([D^k] \times q)) \\ &= s g_*([D^k]). \end{aligned}$$

□

1.4.13. Bemerkung. Wir haben für die obigen Ergebnisse angenommen, daß die Einbettung $e\colon N \to M$ orientierbar ist, das heißt, daß $\Theta_N \cong \Theta_M|_N$. Ist dies nicht der Fall, muß man $\tau \in H^{m-n}(W, S; \Theta_N \otimes \Theta_M)$ definieren und dabei $(\Theta_N \otimes \Theta_M) \otimes \Theta_M \cong \Theta_N$ ausnutzen. Ebenso ist dann $\nu \in H_{m-n}(W, S; \Theta_N \otimes \Theta_M)$.

Abschnitt 2

Die Kohomologie der Zopfgruppe

2.1 Die Zopfgruppe und verwandte Gruppen

2.1.1. Definition. Für einen topologischen Raum X sei

$$X[m] := \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m \colon x_i \text{ paarweise verschieden}\}$$

der m-te geordnete Konfigurationsraum zu X. Die symmetrische Gruppe $S(m)$ operiert frei von rechts auf $X[m]$ durch $(x, \pi) \mapsto \pi^* x$. Es sei nun $X(m) := X[m]/S(m)$ der m-te ungeordnete Konfigurationsraum zu X. Punkte in $X(m)$ sind also m-elementige Teilmengen von X.

Uns werden die Räume $\mathbb{R}^n[m]$ und $\mathbb{R}^n(m)$ interessieren. Der Bestimmtheit halber wählen wir in $\mathbb{R}^n[m]$ den Basispunkt $(x_1, \dots, x_m)$ mit $x_i = (i-1, 0, \dots, 0)$.

2.1.2. Definition. Es sei $\mathrm{Br}(m) := \pi_1(\mathbb{R}^2(m))$ die Zopfgruppe mit m Fäden und $I(m) := \pi_1(\mathbb{R}^2[m])$ die gefärbte Zopfgruppe.

Sei $\mathbb{R}^\infty$ der direkte Limes der $\mathbb{R}^n$.

2.1.3. Lemma. *Für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $m \in \mathbb{N}$ ist die von der Projektion*

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n)^{m+1} &\to (\mathbb{R}^n)^m \\ (x_1, \dots, x_{m+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

induzierte Abbildung $p \colon \mathbb{R}^n[m+1] \to \mathbb{R}^n[m]$ ein lokal triviales Bündel mit Faser $\mathbb{R}^n - (m$ Punkte$)$.

Beweis. Sei $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^n[m]$. $p^{-1}[\{x\}]$ ist via Projektion auf die $m+1$-te Komponente homöomorph zu $\mathbb{R}^n - \{x_1, \dots, x_m\}$. Ich werde nun eine Umgebung U von x und eine Abbildung $f \colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ angeben, so daß für jedes $y \in U$ die Einschränkung $f|_{\{y\} \times \mathbb{R}^n}$ ein Homöomorphismus und $f(y, y_k) = x_k$ ist. Die Funktion

$$\begin{aligned} p^{-1}[U] &\to U \times p^{-1}[\{x\}] \\ (y_1, \dots, y_{m+1}) &\mapsto ((y_1, \dots, y_m), f((y_1, \dots, y_m), y_{m+1})) \end{aligned}$$

ist dann eine Trivialisierung um x.

Sei $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm versehen, $d := \frac{1}{2}\min_{i\neq j}\|x_i - x_j\|$, $U := \{y \in \mathbb{R}^n[m] \colon \|x_i - y_i\| < \frac{d}{2} \text{ für alle } i\}$, $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine glatte Funktion mit $\varphi[[0,\frac{d^2}{4}]] = \{1\}$ und $\varphi[[d^2,\infty)] = \{0\}$. Ist nun zunächst $n < \infty$, dann ist

$$\begin{aligned} v\colon U \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (y,u) &\mapsto \sum_{i=1}^{m} \varphi(\|u - y_i\|^2)(x_i - y_i) \end{aligned}$$

ein glatt von $y \in U$ abhängiges glattes Vektorfeld mit kompakten Träger. Es existiert also ein globaler Fluß $U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, und die Homöomorphismen zum Zeitpunkt 1 erfüllen die Bedingungen an f. Für verschiedenes n passen die Abbildungen zusammen und ergeben so eine Abbildung für den Fall $n = \infty$. □

2.1.4. Korollar. *Der Raum $\mathbb{R}^n - (m$ Punkte$)$ ist bis auf Homöomorphie wohldefiniert.*

Beweis. Die Fälle $n = 0,1$ sieht man direkt. Für $n \geq 2$ bemerkt man, daß jeder dieser Räume als Faser vorkommt und $\mathbb{R}^n[m]$ zusammenhängend ist, was man durch eine vereinfachte Fassung des folgenden Beweises zeigen kann. □

2.1.5. Proposition. *Für $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ und $m \in \mathbb{N}$ ist $\pi_k(\mathbb{R}^n[m]) = 0$, wenn $k < n-1$ oder wenn $n = 2$ und $k \neq 1$.*

Beweis. Man betrachtet wieder die Bündelabbildung (und damit Faserung) $\mathbb{R}^n[m+1] \to \mathbb{R}^n[m]$. Es ist $\pi_k(\mathbb{R}^n - (m$ Punkte$))$ trivial, wenn $k < n-1$ oder $n = 2$ und $k \neq 1$. Also sind die in den langen exakten Homotopiesequenzen auftretenden Abbildungen $\pi_k(\mathbb{R}^n[m+1]) \to \pi_k(\mathbb{R}^n[m])$ für $k < n-1$ injektiv und im Fall $n = 2$ auch für $k > 1$. Die Behauptung folgt nun durch Induktion, da sie für den einpunktigen Raum $\mathbb{R}^n[0]$ sicher gilt. □

2.1.6. Korollar. *Die von der Inklusion induzierte Abbildung $\pi_k(\mathbb{R}^n(m)) \to \pi_k(\mathbb{R}^{n'})(m)$ ist für $1 \leq k+1 < n \leq n' \leq \infty$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Der Fall $k = 0$ ist klar, da mit $\mathbb{R}^n[m]$ auch $\mathbb{R}^n(m)$ wegzusammenhängend ist. Für $k > 0$ ist $\pi_k(\mathbb{R}^n[m]) \cong \pi_{k-1}(\mathbb{R}^n[m]) \cong 0$. Die Quotientenabbildung $\mathbb{R}^n[m] \to \mathbb{R}^n(m)$ ist ein $S(m)$-Prinzipalbündel und die Inklusion $\mathbb{R}^n[m] \to \mathbb{R}^{n'}[m]$ ein Bündelmorphismus. Aus den langen exakten Homotopiesequenzen erhält man also das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \pi_k(\mathbb{R}^n(m)) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_{k-1}(S(m)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \pi_k(\mathbb{R}^{n'}(m)) \arrow[r] & \pi_{k-1}(S(m)) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. □

Ebenso erhält man:

2.1.7. Korollar. *Der Raum* $\mathbb{R}^2[m]$ *ist vom Typ* $K(I(m), 1)$, $\mathbb{R}^2(m)$ *vom Typ* $K(\mathrm{Br}(m), 1)$, $\mathbb{R}^\infty(m)$ *vom Typ* $K(S(m), 1)$. □

2.1.8. Proposition. *Die Abbildungen*

$$\mathbb{R}^2[m] \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2(m) \xrightarrow{i} \mathbb{R}^\infty(m)$$

induzieren eine kurze exakte Sequenz

$$I(m) \rightarrowtail{p_\#} \mathrm{Br}(m) \xrightarrow{i_\#} S(m)$$

Beweis. Dies ist gleichbedeutend damit, daß

$$\begin{tikzcd} I(m) \arrow[r] \arrow[d, "p_\#"] & 0 \arrow[d] \\ \mathrm{Br}(m) \arrow[r, "i_\#"] & S(m) \end{tikzcd}$$

ein Pull-back-Diagramm und $i_\#$ surjektiv ist. Dies folgt sofort aus Korollar 1.1.25. □

2.1.9. Proposition. *Es gibt Homomorphismen* $I(m_1) \times I(m_2) \to I(m_1 + m_2)$ *und* $\mathrm{Br}(m_1) \times \mathrm{Br}(m_2) \to \mathrm{Br}(m_1 + m_2)$, *so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} I(m_1) \times I(m_2) \arrow[r, tail] \arrow[d] & \mathrm{Br}(m_1) \times \mathrm{Br}(m_2) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S(m_1) \times S(m_2) \arrow[d, tail] \\ I(m_1 + m_2) \arrow[r, tail] & \mathrm{Br}(m_1 + m_2) \arrow[r, two heads] & S(m_1 + m_2) \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei die Abbildung $S(m_1) \times S(m_2) \to S(m_1 + m_2)$ *die Inklusion ist, die man erhält, wenn man* $S(m_1)$ *mit* $S(\{1, \ldots, m_1\})$, $S(m_2)$ *mit* $S(\{m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2\})$ *und* $S(m_1 + m_2)$ *mit* $S(\{1, \ldots, m_1 + m_2\})$ *identifiziert. Insbesondere ist das linke Quadrat ein Pull-back-Diagramm.*

Beweis. Man betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^n[m_1] \times \mathbb{R}^n[m_2] \to \mathbb{R}^n[m_1 + m_2] \\ &\qquad (x, x') \mapsto \big(x_1, \ldots, x_{m_1}, x'_1 + c, \ldots, x'_{m_2} + c\big) \\ &\qquad\qquad \text{mit } c = \big(1 + \max_k (x_k)_1 + \max_k (-x'_k)_1, 0, \ldots, 0\big). \end{aligned}$$

Sie kommutiert mit der Operation von $S(m_1) \times S(m_2)$ (auf der rechten Seite vermittels der Inklusion $S(m_1) \times S(m_2) \to S(m_1 + m_2)$) und den Inklusionen $\mathbb{R}^n[m] \to \mathbb{R}^{n'}[m]$ und ist punktiert. Sie induziert daher das Diagramm aus der Behauptung. Für ein solches kommutatives Diagramm mit kurzen exakten Reihen ist das linke Quadrat immer ein Pull-back-Diagramm. □

2.2 Zelluläre Zerlegung der Konfigurationsräume

Das Ziel ist es nun, mit Hilfe einer zellulären Zerlegung die Kohomologie der Räume $\mathbb{R}^n(m)$ zu bestimmen. Will man beliebige Koeffizientensysteme zulassen, so braucht man zusätzliche Information, zum Beispiel eine Zerlegung der universellen Überlagerung des Raumes und die Operation der Fundamentalgruppe auf dieser Zerlegung. Uns interessieren aber nur Koeffizientensysteme auf $\mathbb{R}^n(m)$, die durch Einschränkung von Koeffizientensystemen auf $\mathbb{R}^\infty(m)$ entstehen, so daß es genügt, die Einschränkung der universellen Überlagerung von $\mathbb{R}^\infty(m)$ und die Operation der Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^\infty(m)$ auf ihr zu betrachten. Dies ist aber gerade $\mathbb{R}^n[m]$ zusammen mit der Operation von $S(m)$.

Außerdem wird es sich, da $\mathbb{R}^n[m]$ nicht kompakt ist, als nützlich erweisen, einen kompakten, unter der Operation von $S(m)$ invarianten Deformationsretrakt $\widetilde{\mathbb{R}^n[m]}$ zu finden, der eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, und dann die Kohomologie mittels Poincaré-Dualität

$$H^{mn-k}(\mathbb{R}^n(m)) \cong H_k(\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}, \mathfrak{d}\widetilde{\mathbb{R}^n(m)})$$

mit geeeigneten Koeffizienten zu bestimmen.

Es wird sich herausstellen, daß man an Stelle des Retraktes modulo Rand auch eine geeignete Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n[m]$ modulo des Komplements von $\mathbb{R}^n[m]$ in dieser Kompaktifizierung betrachten kann. Da $\mathbb{R}$ homöomorph zu dem offenen Intervall $(-1, 1)$ ist, ist, wenn man mit I (ausnahmsweise) das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$ bezeichnet, $(I^n)^m$ eine Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n[m]$, denn

$$\mathbb{R}^n[m] \approx (I^n)^m - \Sigma$$

mit

$$\Sigma := \mathfrak{d}(I^n)^m \cup \{x : \text{Ex. } i \neq j \text{ mit } x_i = x_j\}.$$

Es ist jedoch ein wenig Vorsicht geboten, denn $S(m)$ operiert für $m > 1$ nicht frei auf $(I^n)^m$, das heißt Koeffizientensysteme auf $\mathbb{R}^n(m) \approx \big((I^n)^m - \Sigma\big)/S(m)$ lassen sich im allgemeinen nicht auf $(I^n)^m/S(m)$ fortsetzen. Diesem Problem werden wir in Proposition 2.3.1 begegnen.

Erste Zerlegung

Zunächst halten wir für das Standard-k-Simplex

$$\Delta^k = \left\{x \in \mathbb{R}^{k+1} : x_i \geq 0, \sum x_i = 1\right\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

die Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma_k \colon \Delta^k &\to I^k \\ x &\mapsto \Big(2 \sum\nolimits_{j \leq i} x_j - 1\Big)_i \end{aligned}$$

fest und bemerken, daß sie affin linear und injektiv ist. Auch induziert sie einen Homöomorphismus $\operatorname{int}\Delta^k \to (\operatorname{int} I)(k)$, was unser Interesse an ihr erklärt.

Wir konstruieren nun eine simpliziale Zerlegung des Paares $\bigl((I^n)^m, \Sigma\bigr)$. Für jedes $x \in (I^n)^m$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ erhält man eine Ordnung auf $\{1, \ldots, m\}$, wenn man $x_{1\,k}, \ldots, x_{m\,k}$ vergleicht. Außerdem kann man jede Komponente von x auf Gleichheit mit ± 1 testen. Alle x, die hierbei das gleiche Ergebnis liefern, werden bei der folgenden Zerlegung eine offene Zelle bilden, die wir dann allerdings noch unterteilen werden.

Sei zunächst $n = 1$. Sei $\preccurlyeq$ eine Halbordnung auf $\{1, \ldots, m, -\infty, +\infty\}$, so daß $-\infty \prec +\infty$, $-\infty \preccurlyeq k \preccurlyeq +\infty$ für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$. Bezeichne $|\preccurlyeq|$ die Zahl der von $\preccurlyeq$ bestimmten Äquivalenzklassen und sei $|\preccurlyeq| = k + 2$. Es ist $0 \le k \le m$. Durch Abzählen der Äquivalenzklassen ergibt sich eine Abbildung $a\colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, k + 2\}$. Vermöge dieser Entsprechung ist auch klar, was mit $\pi^*(\preccurlyeq)$ für $\pi \in S(m)$ gemeint ist, nämlich die ebenso durch $\pi^* a = a \circ \pi$ gegebene Halbordnung. Betrachten wir außerdem

$$\begin{aligned} j\colon I^k &\to I^{k+2} \\ (x_1, \ldots, x_k) &\mapsto (-1, x_1, \ldots, x_k, 1) \end{aligned}$$

und die oben gegebene Abbildung σ_k, so erhalten wir die Abbildung

$$f_{\preccurlyeq} := \bigl((a^*) \circ j\bigr)_* \, \sigma_k \colon \Delta^k \to I^m.$$

Die Menge aller auf diese Art erhaltenen Abbildungen ergibt eine simpliziale Zerlegung von (I^m, Σ),[1] und für $\pi \in S(m)$ ist $f_{\pi^*(\preccurlyeq)} = (\pi^*)_* f_{\preccurlyeq}$.

Betrachten wir nun die erste Normalunterteilung dieses Komplexes, so sind die Homöomorphismen, die die Operation von $S(m)$ auf (I^m, Σ) bilden, immer noch simplizial, und $0 \in I^m$ ist eine Ecke des neuen Komplexes, denn 0 ist das Baryzentrum des 1-Simplexes, das zu der Halbordnung gehört, die die Äquivalenzklassen $\{-\infty\}$, $\{\infty\}$ und $\{1, \ldots, m\}$ liefert.

Betrachtet man weiter auf $(I^n)^m \approx (I^m)^n$ das Produkt dieser Komplexe, so erhält man eine Zerlegung von $\bigl((I^n)^m, \Sigma\bigr)$. Machen wir diese nun durch baryzentrische Unterteilung simplizial, so operiert $S(m)$ immer noch durch simpliziale Homöomorphismen auf $\bigl((I^n)^m, \Sigma\bigr)$. Identifiziert man I^n mit $I^n \times \{0\} \subset I^{n+1}$, so ist der für $\bigl((I^n)^m, \Sigma\bigr)$ erhaltene Komplex Unterkomplex dessen von $\bigl((I^{n+1})^m, \Sigma\bigr)$.

2.2.1. Definition. Es sei $\widetilde{\mathbb{R}^n[m]}$ das Komplement der offenen simplizialen Umgebung von Σ in der zweifachen Normalunterteilung der soeben beschriebenen simplizialen Zerlegung von $\bigl((I^n)^m, \Sigma\bigr)$ und $\widetilde{\mathbb{R}^n(m)} := \widetilde{\mathbb{R}^n[m]}/S(m)$.

Da $\mathbb{R}^n(m) \approx \bigl((I^n)^m - \Sigma\bigr)/S(m)$, haben wir das folgende Ergebnis.

[1] Wenn das nicht offensichtlich ist, bemühe man eine Rechnung wie in Lemma 2.2.13.

2.2.2. Proposition. *$\widetilde{\mathbb{R}^n[m]}$ und $\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}$ sind homöomorph zu kompakten Deformationsretrakten von $\mathbb{R}^n[m]$ beziehungsweise $\mathbb{R}^n(m)$. Es ist $\widetilde{\mathbb{R}^n[m]} = \widetilde{\mathbb{R}^{n+1}[m]} \cap \mathbb{R}^n[m]$ und ebenso für $\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}$.* □

Zweite Zerlegung

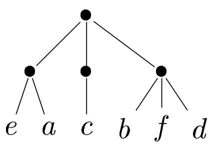
Die soeben beschriebene Zerlegung hat den Nachteil, viele Zellen zu benötigen. Um weniger Zellen[2] zu erhalten, testen wir nicht mehr auf Gleichheit mit ± 1 und vergleichen $x_{i\,k}$ und $x_{j\,k}$ nur dann, wenn $x_{i\,l} = x_{j\,l}$ für $l < k$. Wir ordnen die Komponenten von $x \in I^n[m]$ also lexikographisch. Diese Zerlegung wird in die in [16] beschriebene münden, für $n = 2$ stimmt sie mit der aus [4] überein.

Die nun beschriebene Menge wird die Zellen indizieren. M bezeichne eine endliche Menge.

$$T_1(M) := \{r : r \text{ Ordnung auf } M\}$$

$$T_{n+1}(M) := \left\{ (r,s) : r \text{ Halbordnung auf } M,\ s \in \prod_{\substack{N \text{ Äq.-Klasse} \\ \text{von } r}} T_n(N) \right\}$$

Man beachte auch, daß jedes $x \in I^n[m]$ ein $t \in T_n(\{1,\dots,m\})$ bestimmt, indem man für die r, die in der Definition von T_k auftauchen, die $x_{1,n+1-k},\dots,x_{m,n+1-k}$ vergleicht, und daß so jedes $t \in T_n(\{1,\dots,m\})$ einer Äquivalenzklasse von lexikographisch gleich geordneten $x \in I^n[m]$ entspricht. Damit haben wir wieder eine Operation der symmetrischen Gruppe $S(M)$ von rechts auf $T_n(M)$, die wir mit π^* bezeichnen. Man kann ein $t \in T_n(M)$ als einen geordneten Baum der Höhe n mit Blättern M betrachten.



$t \in T_2(\{a,\dots,f\})$

Für eine Halbordnung (oder Ordnung) $\preccurlyeq$ auf M konstruieren wir wie oben (nur ohne die Details, die mit $\pm\infty$ zusammenhingen) eine Abbildung

$$g_{\preccurlyeq} : \Delta^{|\preccurlyeq|} \to I^M,$$

also $g_{\preccurlyeq} = (a^*)_* \sigma_{|\preccurlyeq|}$, wobei $a\colon M \to \{1,\dots,|\preccurlyeq|\}$ die durch $\preccurlyeq$ gegebene surjektive Abbildung ist. Insbesondere haben wir Abbildungen

$$g_t : \Delta^{|M|} \to I^M \quad \text{für } t \in T_1(M).$$

Allgemein konstruiert man nun Abbildungen

$$g_t : D_t \to \left(I^M\right)^n \quad \text{für } t \in T_n(M),$$

[2] Genaueres über die Anzahl ist in Proposition A.2.1 zu finden.

durch

$$g_{(\preccurlyeq,(t_1,\ldots,t_{|\preccurlyeq|}))} := g_{\preccurlyeq} \times g_{t_1} \times \cdots \times g_{t_{|\preccurlyeq|}},$$

was auch D_t definiert. Die t_k seien dabei in der Reihenfolge genommen, die $\preccurlyeq$ bestimmt. D_t ist Produkt von Simplices und damit eine Zelle. Die Dimension $|t|$ dieser Zelle erhält man durch

$$|\prec| = |\prec|,$$
$$\big|\big(\preccurlyeq,(t_1,\ldots,t_{|\preccurlyeq|})\big)\big| = |\preccurlyeq| + |t_1| + \cdots + |t_{|\preccurlyeq|}|.$$

Insbesondere ist also $n-1+m \leq |t| \leq mn$ für $t \in T_n(M)$, $|M| = m$. Es ist wieder $(\pi^*)_* g_t = g_{\pi^* t}$.

Nun ist $\big\{g_t : t \in T_n(\{1,\ldots,m\})\big\}$ eine relative Zellzerlegung des Paares $\big((I^n)^m, \Sigma\big)$. Das ist leicht zu sehen, wir werden den endgültigen Beweis aber auf Korollar 2.2.11 verschieben, da es sich dort ohnehin ergibt. Jetzt schon bemerken wir, daß jedes g_t injektiv ist und stückweise linear, wenn D_t die pl-Struktur trägt, die es als Produkt von Simplices erhält, und $(I^M)^n$ die von der ersten Zerlegung bestimmte, also die gewöhnliche. Auch ist jeder Punkt aus $(I^M)^n - \Sigma$ für genau ein t Bild eines inneren Punktes von D_t unter g_t. Es wird also nur noch zu zeigen sein, daß die Anheftungsabbildungen 'erlaubt' sind.

$g_{\preccurlyeq}$ ist ein singulärer Simplex und damit ein Element aus $\Delta_{|\preccurlyeq|}(I^M)$; dieses werde ich mit $c_{\preccurlyeq}$ bezeichnen. Analog zu oben definiere ich weiterhin

$$c_t \in \Delta_{|t|}\big((I^M)^n\big) \quad \text{für } t \in T_n(M),$$

durch

$$c_{(\preccurlyeq,(t_1,\ldots,t_{|\preccurlyeq|}))} := c_{\preccurlyeq} \times c_{t_1} \times \cdots \times c_{t_{|\preccurlyeq|}}.$$

Es ist also c_t das Bild eines Fundamentalzykels von $(D^{|t|}, \mathfrak{d}D^{|t|})$ unter $(g_t)_\Delta$. Damit dieser Zykel geometrisch angenehme Eigenschaften hat und im folgenden einige Gleichheiten schon auf Kettenniveau gelten, sei in diesem Abschnitt auf Kettenebene immer das Kreuzprodukt gemeint, von dem die nächste Proposition unter anderem sagt, daß es eines ist.

2.2.3. Proposition. *Seien X, Y Räume. $\imath_k$ bezeichne das durch die Identität $[e_0,\ldots,e_k]$ gegebene Element von $\Delta_k(\Delta^k)$. Durch*

$$\begin{aligned} f_\Delta(\imath_l) \otimes g_\Delta(\imath_k) \mapsto \sum_{0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_l \leq k} & (-1)^{r_1+\cdots+r_l} \\ & \big((f \times g) \circ [(e_0,e_0),\ldots,(e_0,e_{r_1}),(e_1,e_{r_1}),\ldots, \\ & \qquad (e_{l-1},e_{r_l}),(e_l,e_{r_l}),\ldots,(e_l,e_k)]\big)_\Delta(\imath_{l+k}) \end{aligned}$$

ist eine in X, Y natürliche Kettenabbildung $\times : \Delta_*(X) \otimes \Delta_*(Y) \to \Delta(X \times Y)$ gegeben, und identifiziert man singuläre 0-Simplices mit ihrem Bild, so ist $p \times q = (p, q)$ für $p \in X$, $q \in Y$. Außerdem ist $\times$ assoziativ und gradiert kommutativ.

Beweis. Durch Rechnung; siehe auch [3, VI.12.26 excs. 2]. □

Die Randabbildung

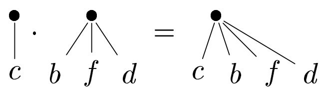
Zuerst brauchen wir ein paar Notationen. Sei r eine Halbordnung auf M, $|r| = k$, dann erhält man für $1 \leq i \leq k-1$ eine neue Halbordnung durch Zusammenfassen der i-ten und $(i+1)$-ten Äquivalenzklasse. Ist also r durch eine surjektive Abbildung $a : M \to \{1, \ldots, k\}$ gegeben und

$$\begin{aligned} s_i : \{1, \ldots, k\} &\to \{1, \ldots, k-1\} \\ j &\mapsto \begin{cases} j, & j \leq i \\ j-1, & j > i, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1}$$

dann ist die neue Relation durch $s_i \circ a$ gegeben. Diese Relation werde ich mit $r^{(i)}$ bezeichnen.

Sind r und s Halbordnungen auf M beziehungsweise N, $M \cap N = \emptyset$, dann werde ich mit $r \cdot s$ die Halbordnug auf $M + N$ bezeichnen, die $|r| + |s|$ Äquivalenzklassen definiert, eingeschränkt auf M beziehungsweise N die gegebenen Halbordnungen ergibt, und in der alle Elemente aus M vor denen aus N kommen. Sind M und N mit mit r und s verträglichen Ordnungen versehen, so bezeichne $S_{r,s}$ die Menge der $\binom{|r|+|s|}{|r|}$ Permutationen von $M + N$, die die von r und s bestimmten Äquivalenzklassen zusammenhängend lassen und innerhalb ihrer die Ordnung erhalten. Für ein solches $\pi \in S_{r,s}$ bezeichne π' die entsprechende Permutation auf den Äquivalenzklassen. Man beachte, daß die Abbildung $\pi \mapsto \pi'$ eine Bijektion und zu gegebenem π' das Signum $\operatorname{sgn}(\pi)$ unabhängig von den gewählten Ordnungen ist. Wir setzen nun $r \cdot_\pi s := \pi^*(r \cdot s)$.

Analog setzen wir für $t \in T_n(M)$, $t' \in T_n(N)$, $t = \big(r, (t_1, \ldots, t_{|r|})\big)$, $t' = \big(r', (t'_1, \ldots, t'_{|r'|})\big)$ nun $S_{t,t'} := S_{r,r'}$, wobei M und N mit den von t und t' (lexikographisch) bestimmten Ordnungen versehen seien, und

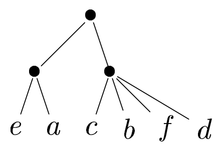


$$t \cdot_\pi t' := \big(r \cdot_\pi r', (t_1, \ldots, t_{|r|}, t'_1, \ldots, t'_{|r'|})\big) \in T_n(M+N).$$

Der Leser sei gewarnt, daß die t_i und t'_i hier *nicht* in der üblichen Reihenfolge stehen. Es ist $|t \cdot t'| = |t| + |t'|$. Für $t \cdot_e t'$, e die triviale Permutation, schreibe ich auch $t \cdot t'$.

Für $t \in T_n(M)$, $n > 1$, $t = \big(r, (t_1, \ldots, t_{|r|})\big)$, $1 \leq i \leq |r| - 1$, $\pi \in S_{t_i, t_{i+1}}$ definiere ich schließlich $t^{(i,\pi)} \in T_n(M)$ durch

$$t^{(i,\pi)} := \big(r^{(i)}, (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i \cdot_\pi t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_{|r|})\big).$$



$t^{(2)}$ (vgl. S. 46)

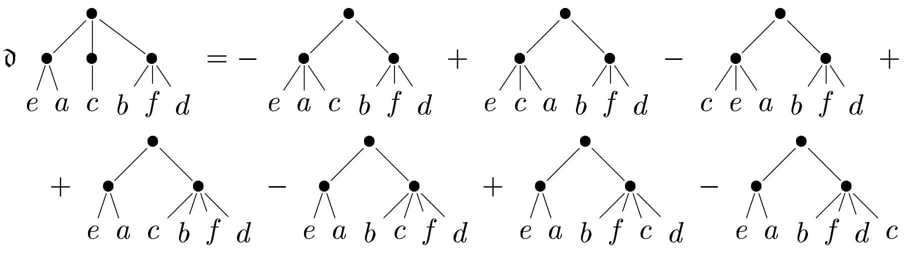


Abbildung 2.1: Beispiel für den Randoperator

Es ist $|t^{(i)}| = |t| - 1$. Für $t^{(i,e)}$ schreibe ich auch $t^{(i)}$.

2.2.4. Definition. Es sei $t \in T_n(M)$, $t' \in T_n(N)$, $t = \big(r, (t_1, \ldots, t_{|r|})\big)$, $t' = \big(r', (t'_1, \ldots, t'_{|r'|})\big)$, $M \cap N = \emptyset$, $\pi \in S_{t,t'}$. Dann sei $\epsilon_\pi := (-1)^{|r'|(|t|-|r|)} \operatorname{sgn}' \pi'$, wobei sgn' das Signum bezeichne, das sich ergibt, wenn die Äquivalenzklassen als Gewicht $|t_i|$ beziehungsweise $|t'_i|$ habend betrachtet werden.

2.2.5. Proposition. *Für $n = 1$ ist ϵ_π immer gleich 1.* □

2.2.6. Definition. Es sei $\mathfrak{T}_n(M)$ die freie abelsche Gruppe über $T_n(M)$. $\mathfrak{d} : \mathfrak{T}_n(M) \to \mathfrak{T}_n(M)$ sei der Gruppenhomorphismus, der durch

$$\mathfrak{d}t := 0 \quad \text{für } t \in T_1(M)$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}t := \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \sum_{\pi \in S_{t_i, t_{i+1}}} (\operatorname{sgn} \pi') \epsilon_\pi t^{(i,\pi)} + \\ + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+|t_1|+\cdots+|t_{i-1}|} \big(r, (t_1, \ldots, t_{i-1}, \mathfrak{d}t_i, t_{i+1}, \ldots, t_k)\big) \end{aligned}$$

für $t \in T_n(M)$, $n > 1$, $t = \big(r, (t_1, \ldots, t_k)\big)$ gegeben ist. Außerdem sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_n(M)_k &:= \Big\{ \sum n_i t_i : |t_i| = k \Big\}, \\ \mathfrak{T}_n(M)^k &:= \Big\{ \sum n_i t_i : |t_i| = |M| n - k \Big\}. \end{aligned}$$

2.2.7. Proposition. *Für $n = 2$ fallen die ϵ und die zweite Summe weg, und π' kann mit π identifiziert werden.* □

2.2.8. Proposition. *Es ist $\mathfrak{d}[\mathfrak{T}_n(M)_k] \subset \mathfrak{T}_n(M)_{k-1}$ und $\mathfrak{d}[\mathfrak{T}_n(M)^k] \subset \mathfrak{T}_n(M)^{k+1}$.* □

2.2.9. Definition. Es sei eine Abbildung $\mathfrak{T}_n(M) \to \Delta_*\big((I^M)^n\big)$, $t \mapsto c_t$ gegeben durch

$$c_{\sum n_i t_i} := \sum n_i c_{t_i} \quad t_i \in T_n(M).$$

2.2.10. Proposition. *Für alle $t \in \mathfrak{T}_n(M)$ ist $\mathfrak{d} c_t = c_{\mathfrak{d} t} \mod \Delta_*(\Sigma)$.*

Vor dem Beweis zwei Korollare und einige Lemmata.

2.2.11. Korollar. *Die Abbildungen $\{g_t \colon t \in T_n(M)\}$ bilden eine relative CW-Zerlegung von $\big((I^M)^n, \Sigma\big)$.*

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen, daß für $t \in T_n(M)_k$ das Bild von $\mathfrak{d} D_t$ unter g_t in der Vereinigung des $k-1$-Skeletts mit Σ liegt. Da g_t injektiv ist, genügt es, zu zeigen, daß $\mathfrak{d} c_t$ modulo $\Delta_*(\Sigma)$ im Erzeugnis von $\{c_t \colon t \in T_n(M)_{k-1}\}$ liegt. Das haben wir soeben getan. □

2.2.12. Korollar. *Für $\mathfrak{d} \colon \mathfrak{T}_n(M) \to \mathfrak{T}_n(M)$ gilt $\mathfrak{d}^2 = 0$.*

Beweis. Die durch $t \mapsto c_t$ gegebene Abbildung $\mathfrak{T}_n(M) \to \Delta_*\big((I^M)^n\big) \to \Delta_*\big((I^M)^n, \Sigma\big)$ ist injektiv, da die g_t eine relative Zellzerlegung von $\big((I^M)^n, \Sigma\big)$ bilden. □

2.2.13. Lemma. *Für eine Halbordnung r ist*

$$\mathfrak{d} c_r = \sum_{i=1}^{|r|-1} (-1)^i c_{r^{(i)}} \mod \Delta_*\big(\mathfrak{d}(I^M)\big).$$

Beweis. Sind $F_l^k \colon \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ für $0 \le l \le k$ die Seiten des Standard-k-Simplexes und s_l die Abbildungen aus (2.1), dann ist

$$(s_i^*)_*(\sigma_{k-1}) = \sigma_k \circ F_l^k \quad \text{für } 1 \le l \le k-1,$$

nämlich

$$\big((s_i^*)_*(\sigma_{k-1})\big)(e_i)_j = \big((\sigma_k \circ F_l^k)(e_i)\big)_j = \begin{cases} 1, & j > i, \\ 1, & j = i, l \ge i, \\ -1, & j = i, l < i, \\ -1, & j < i. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung gilt auch für $l = 0$ und $l = k$, so daß in diesen Fällen die erste Komponente immer -1 beziehungsweise die k-te Komponente immer 1 wird, das Simplex also ganz in $\mathfrak{d} I^k$ landet. Ist nun r durch $a \colon M \to \{1, \dots, k\}$, $k = |r|$ gegeben, so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} c_r &= \mathfrak{d}\left((a^*)_*(\sigma_k)\right) = (a^*)_*(\mathfrak{d}\sigma_k) = (a^*)_* \left(\sum_{l=0}^{k} \sigma_k \circ F_l^k\right) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} (a^*)_* \left((s_i^*)_*(\sigma_{k-1})\right) = \sum_{l=1}^{k-1} \left((s_i \circ a)^*\right)_*(\sigma_{k-1}) = \sum_{l=1}^{k-1} c_{r^{(i)}}. \end{aligned}$$

□

2.2.14. Lemma. *Ist r eine Halbordnung auf M, r' eine Halbordnung auf N, $M \cap N = \emptyset$, dann ist*

$$c_r \times c_{r'} = \sum_{\pi \in S_{r,r'}} \operatorname{sgn}(\pi) c_{r \cdot_\pi r'}.$$

Beweis. Ist $|r| = k$, $|r'| = k'$, so stehen Permutation $\pi \in S_{r,r'}$ in bijektiver Korrespondenz zu k-Tupeln i mit $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq k'$, nämlich, wenn wie oben r durch a und r' durch a' beschrieben wird, vermittels

$$i_l = \max\{a'(y) : y \in N, y \prec_{r \cdot_\pi r'} x\}, \quad \text{wobei } x \in M \text{ mit } a(x) = l.$$

Es ist dann $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{i_1 + i_2 + \cdots + i_k}$ und $r \cdot_\pi r'$ durch

$$\begin{aligned} M + N &\to \{1, \ldots, k + k'\} \\ x &\mapsto \begin{cases} a(x) + i_{a(x)}, & x \in M \\ a'(x) + \max\{j : a'(x) > i_j\}, & x \in N \end{cases} \end{aligned}$$

beschrieben. Setzt man nun zu gegebenem l

$$l' := 1 + \max\{n \in \mathbb{N} : n + i_n < l\},$$

so ist für $m \in M$

$$a(m) < l' \iff a(m) + i_{a(m)} < l$$

und damit

$$\begin{aligned} (g_{r \cdot_\pi r'}(e_l))_m &= (\sigma_{k+k'}(e_l))_{a(m)+i_{a(m)}} \\ &= \begin{cases} -1, & a(m) + i_{a(m)} < l \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1, & a(m) < l' \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= (\sigma_k(e_l))_{a(m)} \\ &= (g_r(e_{l'}))_m. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man für

$$l'' := 1 + \max\bigl\{n \in \mathbb{N} : n + \max\{j : n > i_j\} < l\bigr\}$$

und $n \in N$, daß

$$(g_{r \cdot_\pi r'}(e_l))_n = (g_{r'}(e_{l''}))_n.$$

Vergleich mit Proposition 2.2.3 beweist nun die Behauptung. $\square$

2.2.15. Lemma. *Ist $t \in T_n(M)$, $t' \in T_n(N)$, $M \cap N = \emptyset$, dann ist*

$$c_t \times c_{t'} = \sum_{\pi \in S_{t,t'}} \operatorname{sgn}(\pi')\epsilon_\pi c_{t \cdot_\pi t'}.$$

Beweis. Es sei $t = \big(r, (t_1, \dots, t_{|r|})\big)$ und $t' = \big(r', (t'_1, \dots, t'_{|r'|})\big)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
c_t \times c_{t'} &= c_r \times c_{t_1} \times \cdots \times c_{t_{|r|}} \times c_{r'} \times c_{t'_1} \times \cdots \times c_{t'_{|r'|}} \\
&= (-1)^{|r'|(|t|+|r|)} c_r \times c_{r'} \times c_{t_1} \times \cdots \times c_{t_{|r|}} \times c_{t'_1} \times \cdots \times c_{t'_{|r'|}} \\
&= \sum_{\pi \in S_{t_i, t_{i+1}}} (\operatorname{sgn} \pi')(-1)^{|r'|(|t|+|r|)} \\
&\qquad\qquad c_{r \cdot_\pi r'} \times c_{t_1} \times \cdots \times c_{t_{|r|}} \times c_{t'_1} \times \cdots \times c_{t'_{|r'|}}
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist nun bis auf die Reihenfolge gerade $c_{t \cdot_\pi t'}$. Beim Umordnen erhält man noch einen Faktor $\operatorname{sgn}' \pi'$ und damit die Behauptung. □

Beweis von Proposition 2.2.10. Sei $t \in T_n(M)$. Für $n = 1$, also $t = r$ eine Ordnung auf M, ist $\mathfrak{d} c_r = \sum_i c_{r^{(i)}}$, also in $\Delta_*(\Sigma)$. Sei also $n > 1$, $t = \big(r, (t_1, \dots, t_{|r|})\big)$, dann ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d} c_t &= \mathfrak{d}(c_r \times c_{t_1} \times \cdots \times c_{t_{|r|}}) \\
&= \mathfrak{d} c_r \times c_{t_1} \times \cdots \times c_{t_{|r|}} + \\
&\quad \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+|t_1|+\cdots+|t_{i-1}|} c_r \times c_{t_1} \times \cdots \times c_{t_{i-1}} \times \mathfrak{d} c_{t_i} \times c_{t_{i+1}} \times \cdots \times c_{t_r}.
\end{aligned}$$

Im zweiten Term ist per Induktion $\mathfrak{d} c_{t_i} = c_{\mathfrak{d} t_i} \mod \Delta_*(\Sigma)$, und $c \in \Delta_*(\Sigma)$ impliziert $c_r \times c_{t_1} \times \cdots \times c_{t_{i-1}} \times c \times c_{t_{i+1}} \times \cdots \times c_{t_r} \in \Delta_*(\Sigma)$, wobei die Σs natürlich unterschiedliche Räume bezeichnen und dies nicht für beliebige Ketten an Stelle von c_r gilt. Nun ist noch der erste Term interessant. $\mathfrak{d} c_r$ haben wir bereits in Lemma 2.2.13 modulo $\Delta_*\big(\mathfrak{d}(I^M)\big)$ bestimmt, und ist $c \in \Delta_*\big(\mathfrak{d}(I^M)\big)$, so auch $c \times c_{t_1} \times \cdots \times c_{t_{|r|}} \in \Delta_*\left(\mathfrak{d}\left((I^M)^n\right)\right) \subset \Delta_*(\Sigma)$. In

$$c_{r^{(i)}} \times c_{t_i} \times \cdots \times c_{t_{|r|}} = c_{r^{(i)}} \times c_{t_i} \times \cdots \times (c_{t_i} \times c_{t_{i+1}}) \times \cdots \times c_{t_{|r|}},$$

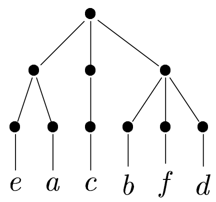
nimmt sich Lemma 2.2.15 der Klammer an. Fügt man nun alles zusammen, erhält man die Behauptung. □

Stabilisierung

Die nun folgenden Definitionen werden bei der Untersuchung der Inklusionen $\mathbb{R}^n(m) \to \mathbb{R}^{n+1}(m)$ Verwendung finden.

2.2.16. Definition.
Wir definieren

$$\begin{aligned} i_{1,2} : T_1(M) &\to T_2(M) \\ r &\mapsto \big(r, (r_1, \dots, r_{|M|})\big), \end{aligned}$$



$i_{2,3}t$ (vgl. S. 46)

wobei die r_i die Ordnungen auf den entsprechenden einelementigen Mengen sind, und für $n > 1$

$$\begin{aligned} i_{n,n+1} &: T_n(M) \to T_{n+1}(M) \\ \big(r, (t_1, \dots, t_k)\big) &\mapsto \big(r, (i_{n-1,n}t_1, \dots, i_{n-1,n}t_k)\big). \end{aligned}$$

Die lineare Fortsetzung auf $\mathfrak{T}_n(M)$ sei ebenfalls mit $i_{n,n+1}$ bezeichnet. Außerdem sei für $k \geq 0$

$$i_{n,n+k} := i_{n+k-1,n+k} \circ i_{n+k-2,n+k-1} \circ \dots \circ i_{n,n+1}.$$

Da die Inklusion $i_{n,n+k} : \mathfrak{T}_n(M) \to \mathfrak{T}_{n+k}(M)$ durch eine Inklusion zwischen den Basen gegeben ist, existiert eine kanonische Projektion.

2.2.17. Definition. Wir definieren

$$\begin{aligned} p_{n+k,n} : T_{n+k}(M) &\to \mathfrak{T}_n(M) \\ t &\mapsto \begin{cases} t', & t = i_{n,n+k}(t'), \\ 0, & t \notin \operatorname{Im} i_{n,n+k}, \end{cases} \end{aligned}$$

und setzen dies linear fort, um eine Abbildung $p_{n+k,n} : \mathfrak{T}_{n+k}(M) \to \mathfrak{T}_n(M)$ zu erhalten.

2.2.18. Proposition. *Die Abbildungen $i_{n,n+k}$ und $p_{n+k,n}$ kommutieren mit der Operation von $S(M)$. Außerdem ist $i_{n,n+k}[\mathfrak{T}_n(M)^l] \subset \mathfrak{T}_{n+k}(M)^l$ und $p_{n+k,n}[\mathfrak{T}_{n+k}(M)^l] \subset \mathfrak{T}_n(M)^l$.* □

2.2.19. Lemma. *Sei $k \geq 1$, $n \geq 1$, $t \in T_{n+k}(M)$. Für $n = 1$ ist*

$$t \in \operatorname{Im} i_{1,1+k} \iff |t| = (1+k)|M|.$$

Für $n > 1$, $t = \big(r, (t_1, \dots, t_l)\big)$ ist

$$t \in \operatorname{Im} i_{n,n+k} \iff t_j \in \operatorname{Im} i_{n-1,n+k-1} \text{ für alle } j.$$

□

2.2.20. Proposition. *Ist $t \in T_{n+1}(M)^k$ und $t \notin \operatorname{Im} i_{n,n+1}$, so ist $k \geq n$.*

Beweis. Ist $n = 1$, so folgt aus dem Lemma, daß $|t| < 2|M|$, also $k = 2|M| - |t| \geq 1$. Für $n > 1$, $t = \big(r, (t_1, \dots, t_{|r|})\big)$ folgt, daß ein l mit $t_l \notin \operatorname{Im} i_{n-1,n}$ existiert. Sind $M_1, \dots, M_{|r|}$ die Äquivalenzklassen zu r, so muß $|M_l| > 1$ und damit $|r| < |M|$ sein, und wir können per Induktion annehmen, daß $n|M_l| - |t_l| \geq n - 1$. Damit ist $k = (n+1)|M| - |t| = |M| - |r| + \sum_j (n|M_j| - |t_j|) \geq |M| - |r| + n|M_l| - |t_l| \geq 1 + n - 1 = n$. □

Die Abbildungen $i_{n,n+1}$ und $\mathfrak{d}$ kommutieren im allgemeinen nicht, dafür haben wir die folgenden Ergebnisse.

2.2.21. Lemma. *Es ist*

$$\operatorname{Im} i_{n-1,n} \subset \operatorname{Ker}(i_{n,n+2} \circ \mathfrak{d} - \mathfrak{d} \circ i_{n,n+2}) \quad \textit{für } n \geq 2$$

und

$$\operatorname{Im}(i_{n,n+2} \circ \mathfrak{d} - \mathfrak{d} \circ i_{n,n+2}) \subset \operatorname{Ker} p_{n+2,n} \quad \textit{für } n \geq 1.$$

Beweis. Zunächst gilt

$$i_{n,n+1}\left(t^{(i,\pi)}\right) = (i_{n,n+1} t)^{(i,\pi)} \quad \text{für } n > 1.$$

Weiterhin ist

$$|i_{n,n+2} t| \equiv |t| \pmod 2.$$

In der Tat ist $|i_{n,n+2} t| = |t| + 2|M|$. Damit sind für $n > 1$ die Vorzeichen in der Formel aus Definition 2.2.6 für $\mathfrak{d} t$ und $\mathfrak{d}(i_{n,n+2} t)$ gleich, und es ist für $t = \big(r, (t_1, \dots, t_k)\big)$

$$\begin{aligned} &(i_{n,n+2} \circ \mathfrak{d} - \mathfrak{d} \circ i_{n,n+2}) t \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{\cdots} \Big(r, \big(t_1, \dots, t_{i-1}, (i_{n-1,n+1} \circ \mathfrak{d} - \mathfrak{d} \circ i_{n-1,n+1}) t_i, t_{i+1}, \dots, t_k\big)\Big). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Lemma 2.2.19 erlaubt uns nun Induktion über n, so daß die Behauptungen nur noch für $n = 2$ beziehungsweise $n = 1$ zu prüfen sind. Im ersten Fall heißt das, zu zeigen, daß (2.2) für $n = 2$ und $t = i_{1,2} r$ Null wird. Die auftretenden t_i sind aus $T_1(\{x\})$, so daß ihr Rand Null ist. Im zweiten Fall bemerkt man einfach, daß $\operatorname{Im}(i_{1,3} \circ \mathfrak{d} - \mathfrak{d} \circ i_{1,3}) \subset \mathfrak{T}_3(M)^1$, aber $\operatorname{Im} i_{1,3} \subset \mathfrak{T}_3(M)^0$. □

2.2.22. Lemma. *Es ist*

$$\operatorname{Ker} p_{n,n+2} \subset \operatorname{Ker}(p_{n,n+2} \circ \mathfrak{d}).$$

Beweis. Wir definieren

$$J := \big\{t \in T_n(M)\colon n \geq 3 \text{ und } t \in \operatorname{Im} i_{n-2,n} \\ \text{oder } 1 \leq n \leq 2 \text{ und } |M| = 1\big\}.$$

J ist unter der Operation von $S(M)$ invariant. Für $t \in T_n(M)$, $n \geq 2$, $t = \big(r, (t_1, \dots, t_k)\big)$ ist

$$t \in J \iff t_i \in J \text{ für alle } i,$$

was ein wenig handlicher als Lemma 2.2.19 ist. Damit haben wir nun, daß für $s \in T_n(M)$, $t \in T_n(M')$

$$s \cdot_\pi t \in J \iff s \in J \wedge t \in J \qquad \text{für } n \geq 2$$

und

$$s \cdot_\pi t \notin J \qquad \text{für } n = 1,$$

allgemein also

$$s \cdot_\pi t \in J \Longrightarrow s \in J \wedge t \in J.$$

Ist nun wieder $t \in T_n(M)$, $n \geq 2$, so hatten wir

$$t^{(i,\pi)} = \big(r^{(i)}, (t_1, \dots, t_{i-1}, t_i \cdot_\pi t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_k)\big).$$

Wir sehen also, daß

$$t^{(i,\pi)} \in J \Longrightarrow t \in J.$$

Taucht nun in der Entwicklung von $\mathfrak{d}t$ ein $t' \in J$ auf, so ist $t \in J$. Denn für $t \in T_1(M)$ ist nichts zu zeigen (in der Entwicklung tritt gar nichts auf) und ansonsten ist dies entweder ein $t^{(i,\pi)}$, also $t \in J$, oder ein t'' aus $\big(r, (t_1, \dots, \mathfrak{d}t_i, \dots, t_k)\big)$, was hieße, daß auch in der Entwicklung von $\mathfrak{d}t_i$ ein Element aus J auftaucht, woraus dann aber induktiv folgte, daß $\mathfrak{d}t_i \in J$ und damit $t \in J$, da $t_j \in J$ für $j \neq i$ schon aus $t'' \in J$ folgt. $\square$

2.2.23. Proposition. *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{T}_{n-1}(M) \arrow[r, "i_{n-1,n}"'] \arrow[rr, bend left, "i_{n-1,n+2}"] & \mathfrak{T}_n(M) \arrow[d, "\mathfrak{d}"] & \mathfrak{T}_{n+2}(M) \arrow[d, "\mathfrak{d}"] \\
& \mathfrak{T}_n(M) \arrow[r, "i_{n,n+2}"] & \mathfrak{T}_{n+2}(M)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Das ist der erste Teil von Lemma 2.2.21. □

2.2.24. Proposition. *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{T}_n(M) & \xleftarrow{p_{n+2,n}} & \mathfrak{T}_{n+2}(M) \\ \downarrow \mathfrak{d} & & \downarrow \mathfrak{d} \\ \mathfrak{T}_n(M) & \xleftarrow{p_{n+2,n}} & \mathfrak{T}_{n+2}(M)\end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Die abelsche Gruppe $\mathfrak{T}_{n+2}(M)$ ist direkte Summe von $\operatorname{Im} i_{n,n+2}$ und $\operatorname{Ker} p_{n+2,n}$. Für $c = i_{n,n+2}c'$ ist

$$(\mathfrak{d} \circ p_{n+2,n})c = \mathfrak{d}\left((p_{n+2,n} \circ i_{n,n+2})c'\right) = \mathfrak{d}c'$$

und nach dem zweiten Teil von Lemma 2.2.21

$$(p_{n+2,n} \circ \mathfrak{d})c = p_{n+2,n}\left((\mathfrak{d} \circ i_{n,n+2})c'\right) = p_{n+2,n}\left((i_{n,n+2} \circ \mathfrak{d})c'\right) = \mathfrak{d}c'.$$

Ist $c \in \operatorname{Ker} p_{n+2,n}$, so ist nach Lemma 2.2.22

$$(p_{n+2,n} \circ \mathfrak{d})c = 0 = (\mathfrak{d} \circ p_{n+2,n})c.$$

□

2.2.25. Definition. Der direkte Limes von

$$T_2(M) \xrightarrow{i_{2,4}} T_4(M) \xrightarrow{i_{4,6}} T_6(M) \xrightarrow{i_{6,8}} \cdots$$

sei mit $T_\infty(M)$ bezeichnet. Die dadurch gebene Abbildung $T_n(M) \to T_\infty(M)$ sei mit $i_{n,\infty}$ bezeichnet. $\mathfrak{T}_\infty(M)$ sei die freie abelsche Gruppe über $T_\infty(M)$. $\mathfrak{d} : \mathfrak{T}_\infty(M) \to \mathfrak{T}_\infty(M)$ sei durch $\mathfrak{d}[c] := [\mathfrak{d}(i_{n,n+2}c)]$ für $c \in \mathfrak{T}_n(M)$ definiert. $S(M)$ operiere auf $T_\infty(M)$ durch $\pi^*([t]) := [\pi^*(t)]$. Es sei

$$\mathfrak{T}_\infty(M)^k := \left\{ i_{n,\infty}(c) : c \in \mathfrak{T}_n(M)^k \right\}.$$

2.2.26. Proposition. $\mathfrak{T}_\infty(M)$ *ist die direkte Summe der* $\mathfrak{T}_\infty(M)^k$*,* $\mathfrak{d}\colon \mathfrak{T}_\infty(M) \to \mathfrak{T}_\infty(M)$ *und die Operation von* $S(M)$ *sind wohldefiniert,* $\mathfrak{d}^2 = 0$ *und* $\mathfrak{d}[\mathfrak{T}_\infty(M)^k] \subset \mathfrak{T}_\infty(M)^{k+1}$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit von $\mathfrak{d}$ folgt aus Proposition 2.2.23. Der Rest folgt dann aus Proposition 2.2.8, Korollar 2.2.12 und Proposition 2.2.18. □

2.2.27. Definition. Für gerades n sei

$$\begin{aligned} p_{\infty,n} : \mathfrak{T}_\infty(M) &\to \mathfrak{T}_n(M) \\ [c] &\mapsto \begin{cases} p_{k,n}c, & c \in \mathfrak{T}_k(M), k > n, \\ i_{k,n}c, & c \in \mathfrak{T}_k(M), n \geq k. \end{cases} \end{aligned}$$

2.2.28. Proposition. *$p_{\infty,n}$ ist eine wohldefinierte Kettenabbildung, und $p_{\infty,n}\left[T_\infty(M)^k\right] \subset T_n(M)^k$.* □

Nach diesen kombinatorischen Aussagen nun noch eine geometrische.

2.2.29. Proposition. *Es sei $t \in T_{n+k}(M)$, k gerade.*

- *Ist $p_{n+k,k}t = 0$, so trifft $g_t\colon D_t \to (I^M)^{n+k}$ den Unterraum $(I^M)^n$ nur in Σ.*
- *Ist $p_{n+k,k}t = t' \in T_n(M)$, so ist $g_t = \left(g_{t'} \times \mathrm{id}_{(I^M)^k}\right) \circ h$ für einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus $h\colon D_t \to D_{t'} \times (I^M)^k$.*

Beweis. Ist $p_{n+k,k}t = 0$, so sieht man aus Lemma 2.2.19, daß es $m_1, m_2 \in M$ gibt, so daß $(g_t(x))_i(m_1) = (g_t(x))_i(m_2)$ für alle x und $1 \le i \le n$. Ist nun $g_t(x) \in (I^M)^n$, also $(g_t(x))_i = 0$ für $i > n$, so ist $(g_t(x))_i(m_1) = (g_t(x))_i(m_2)$ für alle i und damit $g_t(x) \in \Sigma$.

Wir betrachten nun den Fall $t = i_{n,n+k}t'$. Sei zunächst $t = i_{1,1+k}r$, also $t = \big(r, (t_1, \dots, t_{|M|})\big)$, mit $t_i \in T_k(\{m_i\})$. Es ist $g_{t_i}\colon D_{t_i} = (\Delta^1)^k \to \left(I^{\{m_i\}}\right)^k$ Produkt von Homöomorphismen; diese kehren zwar die üblichen Orientierungen um, da aber k gerade ist, ist g_{t_i} orientierungserhaltend. $g_t = g_r \times g_{t_1} \times \dots \times g_{t_{|M|}} = \left(g_r \times \mathrm{id}_{(I^M)^k}\right) \circ \left(\mathrm{id}_{\Delta^{|M|}} \times g_{t_1} \times \dots \times g_{t_{|M|}}\right)$ erfüllt also die Behauptung. Induktiv erhält man für $t' = \big(r, (t_1, \dots, t_{|r|})\big)$, daß

$$
\begin{aligned}
g_t &= g_r \times g_{i_{n-1,n+k-1}t_1} \times \dots \times g_{i_{n-1,n+k-1}t_{|r|}} \\
&= g_r \times \left(\left(g_{t_1} \times \mathrm{id}_{(I^{M_1})^k}\right) \circ h_1\right) \times \dots \times \left(\left(g_{t_{|r|}} \times \mathrm{id}_{\left(I^{M_{|r|}}\right)^k}\right) \circ h_{|r|}\right) \\
&= \left(g_r \times g_{t_1} \times \dots \times g_{t_{|r|}} \times \mathrm{id}_{(I^{M_1})^k} \times \dots \times \mathrm{id}_{\left(I^{M_{|r|}}\right)^k}\right) \circ \\
&\qquad \circ \left(\mathrm{id}_{\Delta^{|r|}} \times (v \circ (h_1 \times \dots \times h_{|r|}))\right) \\
&= \left(g_{t'} \times \mathrm{id}_{(I^M)^k}\right) \circ \left(\mathrm{id}_{\Delta^{|r|}} \times \left(v \circ (h_1 \times \dots \times h_{|r|})\right)\right).
\end{aligned}
$$

Dabei sind h_i die per Induktion existierenden Homöomorphismen und v ein Homöomorphismus der Faktoren des Produkts vertauscht und die Orientierung erhält, da k gerade ist. Eigentlich müßte auch links ein vertauschender Homöomorphismus stehen, aber diese haben wir in der Notation bisher immer unterdrückt. □

2.3 Kohomologie der Konfigurationsräume

Allgemeines

Für $T_n(\{1, \dots, m\})$ werde ich im folgenden auch $T_n(m)$ schreiben.

2.3.1. Proposition. *Für einen $S(m)$-Modul A und $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$H_*(\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}, \partial\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}; A) \cong H_*(\mathfrak{T}_n(m)_*; A).$$

Beweis. Sei $g_t\colon D_t \to I^n[m]$ eine der Zellen, dann ist $g_t^{-1}[\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}]$ auch ein $|t|$-Ball.[3] Wir erhalten so eine relative CW-Zerlegung von $(\widetilde{\mathbb{R}^n[m]}, \partial\widetilde{\mathbb{R}^n[m]})$. Ihr Komplex ist zu dem der Zerlegung von $((I^n)^m, \Sigma)$ isomorph, denn die Abbildungen g_t sind injektiv, so daß eine $n+1$-Zelle und eine n-Zelle genau dann eine Inzidenz ungleich 0 haben, wenn sie gemeinsam ein n-Simplex treffen. Die Inzidenz ist dann ± 1, wobei das Vorzeichen an dem einen Simplex abzulesen ist, und all diese Informationen sind für beide Zerlegungen gleich. Da $\widetilde{\mathbb{R}^n[m]}$ geeignet konstruiert wurde, ist dies ein Isomorphismus von $S(m)$-Kettenkomplexen. Daß der zelluläre Komplex die Homologie berechnet, haben wir in Abschnitt 1.2 gesehen, und daß der zelluläre Komplex von $((I^n)^m, \Sigma)$ isomorph zu $\mathfrak{T}_n(m)_*$ ist, im letzten Abschnitt, insbesondere in Proposition 2.2.10. □

[3]Das folgt aus dem folgenden

Lemma. *Sei M eine pl-Mannigfaltigkeit mit kompaktem Rand, A ein abgeschlossener Unterpolyeder von ∂M, N eine reguläre Umgebung von A in M. Dann gibt es einen Homöomorphismus $M - \operatorname{int} N \approx M$, der außerhalb einer kleinen Umgebung von N mit der Inklusion übereinstimmt.*

Beweis. Da jede pl-Mannigfaltigkeit mit kompaktem Rand einen Kragen hat [9, 2.26], genügt es, $M = \partial M \times [0,3)$ zu betrachten. ∂M sei so trianguliert, daß A ein voller Unterkomplex und $N' := N \cap \partial M$ seine simpliziale Umgebung ist. $\partial M \times [0,2]$ trage nun zunächst die Struktur des Produkt-Zellkomplexes, die sich ergibt, wenn $[0,2]$ mit den Ecken 0, 1 und 2 trianguliert wird. Um dies zu einem simplizialen Komplex zu unterteilen, ordnet man zunächst die Ecken, und zwar die von ∂M so, daß die Ecken von A nach den anderen kommen, und dann $\partial M \times v$ jeweils so und $\partial M \times 0$ vor $\partial M \times 1$ vor $\partial M \times 2$, und geht dann wie in [9, 2.9] vor, was im übrigen auch die Konstruktion ist, die Proposition 2.2.3 zu Grunde liegt. Die simpliziale Umgebung von A in diesem Komplex ist eine reguläre Umgebung (man sehe dazu zum Beispiel [9, 3.11], auch wenn die vorliegende Situation nicht ganz die dortige ist), und da je zwei solche durch einen Homöomorphismus von M, der außerhalb einer kleinen Umgebung beider die Identität ist, aufeinander abgebildet werden können [9, 3.8], können wir annehmen, daß dies N ist. Die Simplices von N, die A nicht berühren, entstehen nun gerade, indem man für jedes Simplex, das A berührt, das ja, da A voller Unterkomplex ist, das Join eines Simplex τ aus A und eines Simplex σ, das ganz außerhalb von A liegt und leer sein kann, das Join von $\tau \times 1$ mit $\sigma \times 0$ bildet. Es gibt daher eine Abbildung $f\colon N' \to [0,1]$, so daß $N = \{(x,r) \in N' \times [0,2] : i \leq f(x)\}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} N' \times [0,2] - \operatorname{int} N &\to N' \times [0,2] \\ (x,r) &\mapsto \left(x, 2\frac{r - f(x)}{2 - f(x)}\right) \end{aligned}$$

ist dann ein Homöomorphismus und auf $\partial N' \times [0,2] \cup N' \times 2$ die Identität, läßt sich also zu einem Homöomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften fortsetzen. □

2.3.2. Proposition. *Für einen $S(m)$-Modul A und gerades $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$H^*(\mathbb{R}^n(m); A) \cong H_*(\mathfrak{T}_n(m)^*; A).$$

Beweis. $\widetilde{\mathbb{R}^n[m]}$ ist eine kompakte mn-Mannigfaltigkeit mit Rand, und ebenso $\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}$. $\widetilde{\mathbb{R}^n[m]}$ ist orientierbar, und die Operation eines Elements $\pi \in S(m)$ erhält die Orientierung gerade dann, wenn $n \cdot \operatorname{sgn} \pi$ gerade ist, in unserem Fall also immer, so daß auch $\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}$ orientierbar ist. Damit erhalten wir die Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^k(\mathbb{R}^n(m); A) &\xrightarrow[\cong]{i^*} H^k(\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}; A) \\ &\xrightarrow[\cong]{D} H_{mn-k}(\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}, \mathfrak{d}\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}; A) \\ &\cong H_{mn-k}(\mathfrak{T}_n(m)_*; A) \\ &= H_k(\mathfrak{T}_n(m)^*; A), \end{aligned}$$

wobei D die Poincaré-Dualitäts-Abbildung bezeichne. □

2.3.3. Proposition. *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} H_*(\mathfrak{T}_{n+2}(m)^*; A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(p_{n+2,n})_*"] & H^*(\mathbb{R}^{n+2}(m); A) \arrow[d, "i^*"] \\ H_*(\mathfrak{T}_n(m)^*; A) \arrow[r, "\cong"] & H^*(\mathbb{R}^n(m); A) \end{tikzcd}$$

kommutiert für gerades n.

Beweis. Zunächst einmal kommutieren

$$\begin{tikzcd} H^k(\mathbb{R}^{n+2}(m); A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "i^*"] & H^k(\widetilde{\mathbb{R}^{n+2}(m)}; A) \arrow[r, "D", "\cong"'] \arrow[d, "i^*"] & H_{m(n+2)-k}(\widetilde{\mathbb{R}^{n+2}(m)}, \mathfrak{d}\widetilde{\mathbb{R}^{n+2}(m)}; A) \arrow[d, "i_!"] \\ H^k(\mathbb{R}^n(m); A) \arrow[r, "\cong"] & H^k(\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}; A) \arrow[r, "D", "\cong"'] & H_{mn-k}(\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}, \mathfrak{d}\widetilde{\mathbb{R}^n(m)}; A), \end{tikzcd}$$

das rechte Quadrat per Definition, und trivial

$$\begin{tikzcd} H_{m(n+2)-k}(\mathfrak{T}_{n+2}(m)_*; A) \arrow[r, equal] \arrow[d, "(p_{n+2,n})_*"] & H_k(\mathfrak{T}_{n+2}(m)^*; A) \arrow[d, "(p_{n+2,n})_*"] \\ H_{mn-k}(\mathfrak{T}_n(m)_*; A) \arrow[r, equal] & H_k(\mathfrak{T}_n(m)^*; A). \end{tikzcd}$$

Daß das noch austehende, diese beiden Diagramme zusammenfügende Quadrat, das mit $i_!$ und $(p_{n+2,n})_*$, kommutiert, folgt aus Vergleich von Proposition 1.4.11 und 1.4.12 mit Proposition 2.2.29. □

2.3.4. Proposition. *Für einen $S(m)$-Modul A gibt es einen Isomorphismus*

$$H^*(\mathbb{R}^\infty(m); A) \cong H_*(\mathfrak{T}_\infty(m)^*; A),$$

so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_*(\mathfrak{T}_\infty(m)^*; A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(p_{\infty,n})_*"] & H^*(\mathbb{R}^\infty(m); A) \arrow[d, "i^*"] \\
H_*(\mathfrak{T}_n(m)^*; A) \arrow[r, "\cong"] & H^*(\mathbb{R}^n(m); A)
\end{tikzcd}$$

für gerades n kommutiert.

Beweis. Nach Korollar 2.1.6 und Proposition 1.2.18 ist

$$\begin{tikzcd}
H^*(\mathbb{R}^0(m)) & H^*(\mathbb{R}^2(m)) \arrow[l, "i^*"'] & H^*(\mathbb{R}^4(m)) \arrow[l, "i^*"'] & \cdots \arrow[l] \\
& & & H^*(\mathbb{R}^\infty(m)) \arrow[ulll, "i^*"] \arrow[ull, "i^*"] \arrow[ul, "i^*"']
\end{tikzcd}$$

(mit Koeffizienten in A) ein inverser Limes und nach Proposition 2.2.20 und Proposition 2.2.28 ebenso

$$\begin{tikzcd}
H_*(\mathfrak{T}_0(m)^*) & H_*(\mathfrak{T}_2(m)^*) \arrow[l, "(p_{2,0})_*"'] & H_*(\mathfrak{T}_4(m)^*) \arrow[l, "(p_{4,2})_*"'] & \cdots \arrow[l] \\
& & & H_*(\mathfrak{T}_\infty(m)^*). \arrow[ulll, "(p_{\infty,0})_*"] \arrow[ull, "(p_{\infty,2})_*"] \arrow[ul, "(p_{\infty,4})_*"']
\end{tikzcd}$$

Die Behauptung folgt daher aus der vorhergehenden Proposition. □

Praktisches

Ist nun A ein $S(M)$-Modul, so interessiert uns $\mathfrak{T}_n(M) \otimes_{S(M)} A$. Jedes $t \in T_n(M)$ definiert eine Ordnung auf M. Kommt M selbst mit einer Ordnung daher, so bezeichne $T_n^{\mathbf{o}}(M)$ die t, die gerade diese Ordnung ergeben. Der wichtigste Fall ist $M = \{1, \ldots, m\}$ mit der üblichen Ordnung. Nun ist $\mathfrak{T}_n(M) \otimes_{S(M)} A \cong \bigoplus_{T_n^{\mathbf{o}}(M)} A$ als abelsche Gruppe und die Randabbildung aus Definition 2.2.6 wird zu

$$\mathfrak{d}(t \otimes a) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \sum_{\pi \in S_{t_i, t_{i+1}}} \Big((\pi^{-1})^* (t^{(i,\pi)}) \otimes (\operatorname{sgn} \pi') \epsilon_\pi (\pi \cdot a) \Big) + \cdots .$$

Für $n = 2$ vereinfacht sich das noch weiter, da hier $(\pi^{-1})^*(t^{(i,\pi)}) = t^{(i)}$. Identifiziert man außerdem $T_2^{\mathbf{o}}(\{1, \ldots, m\})^{m-k}$ via

$$\big(r, (t_1, \ldots, t_{|r|})\big) \mapsto \big(|t_1|, \ldots, |t_{|r|}|\big)$$

mit $\{(n_1,\dots,n_k)\colon n_i \geq 1, \sum_i n_i = m\}$, so erhält man

$$\mathfrak{d}((n_1,\dots,n_k)\otimes a) = \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\Bigg((n_1,\dots,n_{i-1},n_i+n_{i+1},n_{i+2}\dots,n_k)\otimes \sum_{\pi\in S_{N_i,N_{i+1}}}(\operatorname{sgn}\pi)(\pi\cdot a)\Bigg), \tag{2.3}$$

wobei $N_i := \{n\colon n_1+\dots+n_{i-1} < n \leq n_1+\dots+n_i\}$ sei und $S_{N_i,N_{i+1}}$ die Permutationen auf $N_i + N_{i+1}$ bezeichne, die innerhalb von N_i und N_{i+1} die Ordnung erhalten.

Koeffizienten in $\pm\mathbb{Z}$

2.3.5. Definition. $\mathbb{Z}$ aufgefaßt als Modul über einer symmetrischen Gruppe, wobei gerade Permutationen als Identität und ungerade als Multiplikation mit -1 wirken, sei mit $\pm\mathbb{Z}$ bezeichnet.

Ich betrachte nun $\mathfrak{T}_n^{\pm\mathbb{Z}}(M) := \mathfrak{T}_n(M)\otimes_{S(M)}\pm\mathbb{Z}$.

2.3.6. Proposition. *Die Randabbildung in $\mathfrak{T}_2^{\pm\mathbb{Z}}(\{1,\dots,m\})$ ist durch*

$$\mathfrak{d}(n_1,\dots,n_k) = \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\binom{n_i+n_{i+1}}{n_i}(n_1,\dots,n_{i-1},n_i+n_{i+1},n_{i+2},\dots,n_k)$$

gegeben.

Beweis. Dies folgt aus (2.3), da nun $(\operatorname{sgn}\pi)(\pi\cdot a) = (\operatorname{sgn}\pi)^2 a = a$ und $|S_{N_i,N_{i+1}}| = \binom{|N_i|+|N_{i+1}|}{|N_i|}$. □

2.3.7. Satz. *Für $m \geq 2$ ist die Gruppe $H^{m-1}(\mathrm{Br}(m);\pm\mathbb{Z})$ genau dann nicht trivial, wenn m eine Potenz einer Primzahl p ist, in diesem Fall ist sie isomorph zu $\mathbb{Z}_p$.*

Beweis. Es ist $T_2^{\mathbf{o}}(\{1,\dots,m\})^m = \emptyset$ und mit obiger Identifizierung

$$T_2^{\mathbf{o}}(\{1,\dots,m\})^{m-1} = \{(m)\}$$

und

$$T_2^{\mathbf{o}}(\{1,\dots,m\})^{m-2} = \{(m-1,1),(m-2,2),\dots,(1,m-1)\}.$$

Mit Proposition 2.3.6 (und natürlich Proposition 2.3.2) ist nun

$$H^{m-1}(\mathrm{Br}(m);\pm\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(r), \quad r = \operatorname{ggT}\left\{\binom{m}{1},\binom{m}{2},\dots,\binom{m}{m-1}\right\}.$$

Die Behauptung folgt nun aus der folgenden Proposition. □

2.3.8. Proposition. *Für eine natürliche Zahl $m \geq 2$ ist*

$$\operatorname{ggT}\left\{\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \dots, \binom{m}{m-1}\right\} = \begin{cases} p, & m = p^r,\ p \text{ prim}, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Es ist

$$\binom{m}{k} = \frac{m}{k} \cdot \prod_{n=1}^{k-1} \frac{m-n}{n}.$$

Um die Teiler von $m-n$ und n zu vergleichen, bemerken wir: *Ist eine Primzahl p in m öfter enthalten als in n, so ist sie in $m-n$ und n in gleicher Anzahl enthalten.* Dazu schreiben wir $m = p^{s+1}x$, $n = p^s y$ mit einem y, das von p nicht geteilt wird. Dann ist $m - n = p^{s+1}x - p^s y = p^s(px - y)$, und p teilt $px - y$ nicht.

Für $1 \leq k \leq p^r - 1$ ist $\binom{p^r}{k}$ ein Vielfaches der Primzahl p, denn für $1 \leq n \leq p^r - 2$ ist p in n nie r-mal enthalten, die Voraussetzung der Bemerkung also gegeben, und p teilt p^r öfter als k.

Ist m keine Potenz von p, p genau r-mal in m enthalten, so ist $\binom{m}{p^r}$ kein Vielfaches von p, denn für $1 \leq n \leq p^r - 1$ ist p in n nie r-mal enthalten, und p teilt m genau so oft wie p^r. Mit dem gleichen Argument ist p in $\binom{p^r}{p^{r-1}}$ nicht mehr als einmal enthalten. □

2.3.9. Proposition. *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{T}_n^{\pm\mathbb{Z}}(M) & \xrightarrow{i_{n,n+2}} & \mathfrak{T}_{n+2}^{\pm\mathbb{Z}}(M) \\ \Big\downarrow \mathfrak{d} & & \Big\downarrow \mathfrak{d} \\ \mathfrak{T}_n^{\pm\mathbb{Z}}(M) & \xrightarrow{i_{n,n+2}} & \mathfrak{T}_{n+2}^{\pm\mathbb{Z}}(M) \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Der Beweis kann induktiv wie in Lemma 2.2.21 geführt werden. In der Tat ist die Behauptung eine Verschärfung des ersten Teils jenes in allgemeinerem Kontext stehenden Lemmas. Wir müssen daher die Behauptung nur für $n = 1$ zeigen. Für $r \in T_1(M)$ ist $\mathfrak{d}r = 0$, es ist also zu zeigen, daß auch $\mathfrak{d}(i_{1,3}r) = 0$. Nun ist $i_{1,3}r = \big(r, (t_1, \dots, t_m)\big)$, $t_j \in T_2(\{x_j\})$ ($x_j \in M$ hierdurch definiert). In der Definition von $\mathfrak{d}$ fällt die zweite Summe weg, und es ergibt sich $\epsilon_\pi = -\operatorname{sgn}\pi'$ und $(\pi^{-1})^*(t^{(i,\pi)}) = t^{(i)}$, also

$$\mathfrak{d}(i_{1,3}r) = \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{j+1} \left(\sum_{\pi \in S_{t_j, t_{j+1}}} \operatorname{sgn}\pi \right) t^{(j)}.$$

Nun ist aber $S_{t_j,t_{j+1}} = S(\{x_j, x_{j+1}\})$, enthält also gerade die Identität und eine Vertauschung, also genau eine gerade und eine ungerade Permutation. □

2.3.10. Satz. *Der Homomorphismus $H^*(S(m);\pm\mathbb{Z}) \to H^*(Br(m);\pm\mathbb{Z})$ ist ein Epimorphismus.*

Beweis. Wegen Proposition 2.3.9 ist

$$\mathfrak{T}_\infty^{\pm\mathbb{Z}}(M) \cong \operatorname{Im} i_{2,\infty} \oplus \operatorname{Ker} p_{\infty,2}$$

nun auch als Kettenkomplex, so daß

$$H_*(\mathfrak{T}_\infty^{\pm\mathbb{Z}}(M)) \cong H_*(\mathfrak{T}_2^{\pm\mathbb{Z}}(M)) \oplus H_*(\operatorname{Ker} p_{\infty,2})$$

mit der Projektion auf den ersten Summanden induziert von $p_{\infty,2}$. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 2.3.4. □

Triviale Koeffizienten

Um den Kettenkomplex mit Koeffizienten in einem trivialen $S(M)$-Modul zu bestimmen, genügt es, ihn mit Koeffizienten in dem trivialen Modul $\mathbb{Z}$ zu kennen. Ich betrachte daher $\mathfrak{T}_n^{\mathbb{Z}}(M) := \mathfrak{T}_n(M) \otimes_{S(M)} \mathbb{Z}$. Die folgende Formel findet sich in [14].

2.3.11. Proposition. *Die Randabbildung in $\mathfrak{T}_2^{\mathbb{Z}}(\{1,\dots,m\})$ ist durch*

$$\mathfrak{d}(n_1,\dots,n_k) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i c_{n_i}^{n_i+n_{i+1}} (n_1,\dots,n_{i-1},n_i+n_{i+1},n_{i+2},\dots,n_k)$$

gegeben, wobei

$$c_k^n := \begin{cases} 0, & n \text{ gerade, } k \text{ ungerade,} \\ \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. In (2.3) wird für uns $\pi \cdot a$ zu a, es ist also zu zeigen, daß dort

$$\sum_{\pi \in S_{N_i,N_{i+1}}} \operatorname{sgn} \pi = c_{n_i}^{n_i+n_{i+1}}.$$

Eine Überlegung wie die, die auch zur Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten, die man ja gerade erhält, wenn man $\operatorname{sgn}\pi$ durch 1 ersetzt, führt, zeigt, daß das gilt, wenn

$$\begin{aligned} c_n^n &= 1, \\ c_0^n &= 1, \\ c_k^n &= c_{k-1}^{n-1} + (-1)^k c_k^{n-1} \quad \text{für } 0 < k < n. \end{aligned}$$

Eine leichte Rechnung prüft dies für die Formel aus der Behauptung nach. □

Abschnitt 3

Eine komplexitätstheoretische Anwendung

Der Begriff der topologischen Komplexität wurde in [12] eingeführt, und für die Komplexität der Berechnung der Wurzeln eines Polynoms wurde eine untere Schranke angegeben. Ich stelle die verbesserten Ergebnisse aus [15] beziehungsweise [16] vor.

3.1 Algorithmen und das Polynomwurzelproblem

Wir werden die topologische Komplexität (s. u.) des folgenden Problems betrachten:

3.1.1. Definition. *Problem $P(m, \epsilon)$:* Gegeben sei ein komplexes Polynom $z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$ mit $|a_k| \leq 1$ für alle k. Die Menge aller dieser Polynome bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_m$. Berechne alle Wurzeln (mit der richtigen Vielfachheit) mit einem Fehler kleiner als ϵ.

Ich stelle nun vor, was im folgenden unter Algorithmus und topologischer Komplexität verstanden werden wird. Meine Darstellung weicht von der in [12] ab, da ich es für vorteilhaft halte, eine möglichst exakte Definition zur Verfügung zu haben.

Syntax

3.1.2. Definition. $\mathrm{Alg}_{k,l}$, die Mengen der Algorithmen vom Typ (k, l) mit $k, l \in \mathbb{N}$ seien das kleinste Mengensystem mit folgenden Eigenschaften.

- Ist $r\colon D \to \mathbb{R}$ eine rationale Funktion, $D \subset \mathbb{R}^k$ offen, so ist $(\textbf{rat}\ r) \in \mathrm{Alg}_{k,1}$.
- Ist $a_i \in \mathrm{Alg}_{k,l_i}$ für $1 \leq i \leq n$, so ist $<a_1, a_2, \ldots, a_n> \in \mathrm{Alg}_{k,l_1+\cdots+l_n}$.
- Ist $a_1 \in \mathrm{Alg}_{k,p}$, $a_2 \in \mathrm{Alg}_{p,l}$, so ist $(\textbf{compose}\ a_2\ a_1) \in \mathrm{Alg}_{k,l}$.
- Ist $d \in \mathrm{Alg}_{k,1}$, $p \in \mathrm{Alg}_{k,l}$, $n \in \mathrm{Alg}_{k,l}$, so ist $(\textbf{if}\ d\ p\ n) \in \mathrm{Alg}_{k,l}$.

Semantik

Die Semantik eines Algorithmus wird durch die Auswertungsfunktion eval beschrieben. Ein Algorithmus des Typs (k, l) ergibt auf einem Element aus $\mathbb{R}^k$ ausgewertet ein Ergebnis aus $\mathbb{R}^l$ oder ein undefiniertes Ergebnis $(\perp)$.

3.1.3. Definition.

$$\mathrm{eval}\colon \mathrm{Alg}_{k,l} \times (\mathbb{R}^k \cup \{\perp\}) \to \mathbb{R}^l \cup \{\perp\}$$

$$\mathrm{eval}\ (\mathbf{rat}\ r, x) = \begin{cases} r(x), & x \in \operatorname{dom} r \\ \perp, & x \notin \operatorname{dom} r \end{cases}$$

$$\mathrm{eval}\ (<a_1, \ldots, a_n>, x) = \begin{cases} (\mathrm{eval}(a_1, x), \ldots, \mathrm{eval}(a_n, x)), & \underset{k}{\forall}\ \mathrm{eval}\ (a_k, x) \neq \perp \\ \perp, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathrm{eval}\ (\mathbf{compose}\ a_2\ a_1, x) = \mathrm{eval}\ (a_2, \mathrm{eval}\ (a_1, x))$$

$$\mathrm{eval}\ (\mathbf{if}\ d\ p\ n, x) = \begin{cases} \perp, & \mathrm{eval}\ (d, x) = \perp \\ \mathrm{eval}(p, x), & \mathrm{eval}\ (d, x) \geq 0 \\ \mathrm{eval}(n, x), & \mathrm{eval}\ (d, x) < 0 \end{cases}$$

Komplexität

Durch die Anwesenheit von **if**s in einem Programm ergeben sich mehrere Ausführungspfade. Deren Zahl τ' beschreibe ich nun.

3.1.4. Definition.

$$\begin{aligned} \tau'(\mathbf{rat}\ r) &= 1 \\ \tau'(<a_1, \ldots, a_n>) &= \tau'(a_1)\tau'(a_2)\cdots\tau'(a_n) \\ \tau'(\mathbf{compose}\ a_2\ a_1) &= \tau'(a_2)\tau'(a_1) \\ \tau'(\mathbf{if}\ d\ p\ n) &= \tau'(d) \cdot (\tau'(p) + \tau'(n)) \end{aligned}$$

Außerdem sei $\tau(a) := \tau'(a) - 1$. τ heißt die topologische Komplexität.

Jedem Pfad entspricht eine Funktion, die Eingaben auf Ausgaben abbildet. Ich beschreibe nun die Zerlegung eines Algorithmus in solche Funktionen.

3.1.5. Definition.

$$\mathrm{dec}(\mathbf{rat}\ r) = \{r\}$$

$$\mathrm{dec}(<a_1, \ldots, a_n>) = \{(f_i|_{\operatorname{dom} f_i \cap \operatorname{dom}_{g_j}}, g_j|_{\operatorname{dom} f_i \cap \operatorname{dom}_{g_j}}) \colon i \in I,\ j \in J\}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathrm{dec}(<a_1, \ldots, a_{n-1}>) &= \{f_i \colon i \in I\} \\ \mathrm{dec}(a_n) &= \{g_j \colon j \in J\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{dec}(\textbf{compose}\ a_2\ a_1) = \{f_i \circ (g_j|_{g_j^{-1}[\operatorname{dom} f_i]})\colon i \in I,\ j \in J\}&\\ \text{mit}&\\ \operatorname{dec}(a_2) = \{f_i\colon i \in I\}&\\ \operatorname{dec}(a_1) = \{g_j\colon j \in J\}&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{dec}(\textbf{if}\ d\ p\ n) &= \{p_j|_{\operatorname{dom} p_j \cap d_i^{-1}[[0,+\infty)]}\colon i \in I,\ j \in J\}\\ &\quad \cup \{n_k|_{\operatorname{dom} n_k \cap d_i^{-1}[(-\infty,0)]}\colon i \in I,\ k \in K\}\\ &\text{mit}\\ &\operatorname{dec}(d) = \{d_i\colon i \in I\}\\ &\operatorname{dec}(p) = \{p_j\colon j \in J\}\\ &\operatorname{dec}(n) = \{n_k\colon k \in J\}\end{aligned}$$

3.1.6. Proposition. *Sei* $a \in \operatorname{Alg}_{k,l}$, $\operatorname{dec}(a) = \{f_i\colon i \in I\}$, $f_i \neq f_j$ *für* $i \neq j$.

- $\{x \in \mathbb{R}^k\colon \operatorname{eval}(a,x) \neq \bot\} = \bigcup_{i \in I} \operatorname{dom} f_i$, *und die Vereinigung ist disjunkt.*
- *Ist* $x \in \operatorname{dom} f_i$, *so ist* $f_i(x) = \operatorname{eval}(a,x)$.
- *Die* f_i *sind rational, das heißt genauer, für alle Projektionen* p_r *ist* $p_r \circ f_i$ *rational.*
- $\operatorname{dom} f_i$ *ist in* $\mathbb{R}^k$ *der Schnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Menge.*
- $|I| \leq \tau'(a)$.

Beweis. Induktion. □

Das Problem

Identifiziert man $\mathfrak{A}_m$ via der Koeffizienten mit einer Teilmenge von $\mathbb{C}^m$ und $\mathbb{C}^m$ mit $\mathbb{R}^{2m}$, so kann man für einen Algorithmus $a \in \operatorname{Alg}_{2m,2m}$ die Funktion $x \mapsto \operatorname{eval}(a,x)$ als Funktion von $\mathfrak{A}_m$ nach $\mathbb{C}^m \cup \{\bot\}$ auffassen.

3.1.7. Definition. Ein das Problem $P(m,\epsilon)$ lösender Algorithmus ist ein Algorithmus $a \in \operatorname{Alg}_{2m,2m}$, so daß $\operatorname{eval}(a,x)$ für alle $x \in \mathfrak{A}_m$ ungleich $\bot$ ist und sich von einer Ordnung der Wurzeln von a in der richtigen Vielfachheit um weniger als ϵ unterscheidet. $\tau(m,\epsilon)$ sei das Minimum von $\tau(a)$ über alle lösenden Algorithmen a, $\tau(m) := \lim_{\epsilon \to 0+} \tau(m,\epsilon)$, und ebenso für τ'.

3.2 Topologische Beschreibung des Polynomwurzelproblems

In diesem Abschnitt werden wir eine Beschreibung der Komplexität des Polynomwurzelproblems finden, die ohne den Begriff des Algorithmus auskommt.

3.2.1. Definition. Sei $\mathfrak{B}_m$ die Menge aller komplexen Polynome vom Grad m mit Leitkoeffizientem 1. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{C}^m &\to \mathfrak{B}_m, \\ (r_1, \dots, r_m) &\mapsto (z - r_1) \cdots (z - r_m). \end{aligned}$$

Σ bezeichne sowohl die Punkte aus $\mathbb{C}^m$, deren Koordinaten nicht alle verschieden sind, als auch das Bild dieser Menge unter p, also die Polynome mit mehrfachen Nullstellen. Sei $f_m := p|_{\mathfrak{B}_m - \Sigma}$.[1]

Es bezeichne d die Metrik, die auf $\mathbb{C}^m$ durch die Maximumsnorm gegeben ist und auch die Funktion

$$\begin{aligned} d\colon \mathfrak{B}_m \times \mathfrak{B}_m &\to \mathbb{R} \\ (q, q') &\mapsto \min\{d(r, r')\colon\ p(r) = q,\ p(r') = q'\} \end{aligned}$$

3.2.2. Proposition. *Die Abbildung $p\colon \mathbb{C}^m \to \mathfrak{B}_m$ ist eine Quotientenabbildung, wobei $\mathfrak{B}_m$ die Topologie trage, die durch Identifikation eines Polynoms $z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$ mit $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^m$ gegeben ist.*

Beweis. Der Fall $m = 0$ ist trivial, sei also $m > 0$. Der Hauptsatz der Algebra besagt, daß p surjektiv ist. Die Koordinatenfunktionen sind bis auf Vorzeichen gerade die elementarsymmetrischen Funktionen in $r_1, \dots, r_m$, also ist p stetig. Es genügt nun, noch zu zeigen, daß p abgeschlossen ist.

Ist $q(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$ ein Polynom und $|a_i| \le s$ für alle i, so ist $q(z) \ne 0$ für alle z mit $|z| > \max\{1, ms\}$, denn es ist $|q(z)| = |z|^{m-1} \cdot |z + a_1 z^0 + \cdots + a_m z^{-(m-1)}| \ge |z| - |a_1| - \cdots - |a_m| \ge |z| - ms > 0$. Damit ist p eigentlich, also, da $\mathbb{C}^m$ lokal kompakt ist, abgeschlossen. □

3.2.3. Korollar. $d\colon \mathfrak{B}_m \times \mathfrak{B}_m \to \mathbb{R}$ *ist stetig.* □

3.2.4. Definition. Es sei $\nu\colon \mathfrak{B}_m \to \mathbb{C}^m/S(m)$ der Homöomorphismus, so daß

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^m \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr] & \\ \mathfrak{B}_m \arrow[rr, "\nu", "\approx"'] & & \mathbb{C}^m/S(m) \end{tikzcd}$$

kommutiert. □

[1] Diese Bezeichnungen stimmen nicht ganz mit denen in [16] überein.

Das Resultat dieses Abschnitts präsentiere ich in zwei Teilen.

3.2.5. Proposition. *Ist $\tau(m,\epsilon)+1 \le n$, dann existieren eine offene Überdeckung $\{U_k : 1 \le k \le n\}$ von $\mathfrak{A}_m$ und Abbildungen $s_k\colon U_k \to \mathbb{C}^m$, so daß $d(x,p(s_k((x))) < \epsilon$ für alle $x \in U_k$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a}$ ein das Problem lösender Algorithmus mit $\tau'(\mathfrak{a}) \le n$ und $\operatorname{dec}(\mathfrak{a}) = \{s_k\}$, $\operatorname{dom} s_k = V_k$, aufgefaßt als Teilmenge von $\mathbb{C}^m$. Nach Proposition 3.1.6 überdecken die V_k ganz $\mathfrak{A}_m$, sind die s_k stetig, gilt für alle $a \in V_k$

$$d(a,p(s_k((a))) < \epsilon \tag{3.1}$$

und ist jedes V_k abgeschlossen in einer offenen Menge V_k'. Nach dem Tietzeschen Erweiterungssatz läßt sich nun s_k stetig auf V_k' fortsetzen, und die Menge U_k, auf der für die fortgesetzte Funktion immer noch (3.1) gilt, ist offen. □

3.2.6. Proposition. *Existieren eine offene Überdeckung $\{U_k : 1 \le k \le n\}$ von $\mathfrak{A}_m$ und Abbildungen $s_k\colon U_k \to \mathbb{C}^m$, so daß $d(x,p(s_k(x))) < \epsilon$ für alle $x \in U_k$, so ist $\tau(m,\epsilon)+1 \le n$.*

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} := \textbf{if}\ (\textbf{rat}\ d_1)\ <\textbf{rat}\ r_{11},\dots,\textbf{rat}\ r_{1\,2n}>\ (\\
\textbf{if}\ (\textbf{rat}\ d_2)\ <\textbf{rat}\ r_{21},\dots,\textbf{rat}\ r_{2\,2n}>\ (\\
\vdots \\
\textbf{if}\ (\textbf{rat}\ d_{n-1})\ <\textbf{rat}\ r_{n-1\,1},\dots,\textbf{rat}\ r_{n-1\,2n}> \\
<\textbf{rat}\ r_{n\,1},\dots,\textbf{rat}\ r_{n\,2n}>)\cdots),
\end{aligned}$$

wobei d_i und r_{ki} noch anzugebende rationale, sogar polynomielle, Funktionen sind. Dann ist $\tau'(\mathfrak{a}) = n$.

Für jedes k mit $1 \le k < n$ wähle man eine Abbildung $f_k\colon U_k \to \mathbb{R}$ mit $f[\mathfrak{A}_m - U_k] = \{-1\}$ und $f[\mathfrak{A}_m - (\bigcup_{i\neq k} U_i)] = \{1\}]$. Die Existenz solcher Funktionen garantiert das Urysohnsche Lemma. Da $\mathfrak{A}_m$ kompakt ist, kann man nach dem Weierstraßschen Approximationssatz reelle Polynome d_k finden (man betrachtet hier wieder $\mathfrak{A}_m$ via der Koeffizienten als Teilmenge von $\mathbb{C}^m$ und letzteres als $\mathbb{R}^{2m}$), so daß $|d_k(a) - f_k(a)| < 1$ für alle $a \in \mathfrak{A}_m$. Dies seien die im Algorithmus verwandten. Außerdem setze ich zur Erleichterung der Notation $p_n(a) = 1$ für alle $a \in \mathfrak{A}_m$. Es ist $\operatorname{dec}(\mathfrak{a}) = \{r_i|_{M_i} : 1 \le i \le n\}$ mit $M_k = p_1^{-1}[(-\infty,0)] \cap \ldots \cap p_{k-1}^{-1}[(-\infty,0)] \cap p_k^{-1}[[0,\infty]]$. Sei nun $A_k := p_k^{-1}[[0,\infty]]$ für $k < n$ und $A_n := p_1^{-1}[(-\infty,0]] \cap \ldots \cap p_{n-1}^{-1}[(-\infty,0]]$. Die A_k sind abgeschlossen, damit kompakt, und $M_k \subset A_k \subset U_k$. Wegen der Kompaktheit existiert nun ein ϵ' mit $0 < \epsilon' < \epsilon$, so daß $d(x,p(s_k(x))) < \epsilon'$ für alle $x \in A_k$. Man approximiere nun jede Koordinatenfunktion von s_k

mit der Genauigkeit $\epsilon - \epsilon'$ durch ein Polynom. Dies ergibt die gesuchten r_{ki}. Nach Konstruktion löst $\mathfrak{a}$ nun $P(m, \epsilon)$. $\square$

Dies motiviert die Betrachtungen des nächsten Abschnitts.

3.3 Das Genus eines Bündels

Begriffe und Methoden dieses Abschnitts gehen auf [11] zurück.

Definition und einfache Eigenschaften

3.3.1. Definition. Sei $p\colon E \to B$ eine Abbildung. Das Genus $g(p)$ der Abbildung ist die minimale Kardinalität einer offenen Überdeckung von Y, so daß über jeder dieser offenen Mengen ein Schnitt existiert. Existiert keine solche Überdeckung, so setzt man $g(p) = \infty$, wobei ∞ als größer als jede Kardinalzahl zu verstehen ist.

Der Fall eines nicht endlichen Genus wird in diesem Text nicht benötigt werden.

Für ein Bündel $\xi = (E, p, B)$ schreiben wir auch $g(\xi)$ für $g(p)$. Für die nächsten Aussagen bräuchte man eigentlich keine lokale Trivialität.

3.3.2. Proposition. *Sind ξ, ξ' isomorphe Bündel, so ist $g(\xi) = g(\xi')$.* $\square$

3.3.3. Proposition. *Ist ξ ein Bündel über B, $f\colon B' \to B$ eine Abbildung, so ist $g(f^*(\xi)) \leq g(\xi)$.*

Beweis. Sei $\xi = (E, p, B)$ und (E', p', B') die Zurückziehung. Existiert auf einer offenen Menge $U \subset B$ ein Schnitt s, so heißt das, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}[U] \arrow[dr, dotted, "s'"] \arrow[drr, "s\circ f\circ i"] \arrow[ddr, "i"'] & & \\
& E' \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\
& B' \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Vervollständigung s' existiert wegen der universellen Eigenschaft der Zurückziehung und ist ein Schnitt über $f^{-1}[U]$. $\square$

3.3.4. Korollar. *Ist ξ ein Bündel über B, $A \subset B$, so ist $g(\xi|_A) \leq g(\xi)$.* $\square$

Prinzipalbündel

Wir wenden uns nun Prinzipalbündeln zu.

3.3.5. Korollar. *Ist ξ ein numerierbares G-Prinzipalbündel über B, $A \subset B$ ein Deformationsretrakt, so ist $g(\xi|_A) = g(\xi)$.*

Beweis. Es ist $g(\xi|_A) \leq g(\xi)$ und, wenn $r\colon B \to A$ die Retraktion ist, $g(\xi) = g((i \circ r)^*(\xi)) = g(r^*(\xi|_A)) \leq g(\xi|_A)$, da $i \circ r \simeq \mathrm{id}_B$, also $(i \circ r)^*(\xi) \cong \mathrm{id}_B^*(\xi) \cong \xi$. □

3.3.6. Satz. *Sei $\omega = (EG, p, BG)$ ein universelles G-Bündel, G diskret. Sei weiterhin $f\colon B \to BG$ eine Abbildung, B normal und $n \geq g(f^*(\omega))$. Dann ist für beliebige (lokale) Koeffizienten die Abbildung $f^*\colon H^n(BG) \to H^n(B)$ trivial. Ist B ein CW-Raum, so genügt es, wenn ω für solche universell ist.*

Beweis. Sei $EG_n = G * \cdots * G$ der n-fache Join auf dem G komponentenweise operiere und $BG_n = EG_n/G$, p_n die Quotientenabbildung, $\omega_n = (EG_n, p_n, BG_n)$.

So wie numerierbare Bündel von dem abzählbaren Join klassifiziert werden, existiert nun eine Abbildung $h\colon B \to BG_n$, so daß $h^*(\omega_n) \cong f^*(\omega)$. Sei nämlich $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine offene Überdeckung von B, so existiert, da B normal ist, eine Partition der Eins $(p_i : B \to [0,1])_{1 \leq i \leq n}$, so daß p_i Träger in U_i hat. Sind nun $h_i\colon f^*(\omega)|_{U_i} \to G_i$ Trivialisierungen, wobei G_i die i-te Kopie von G in EG_n bezeichne, so ist die sinnfällig $x \mapsto \sum_i p_i(x) h_i(x)$ geschriebene Funktion eine G-Bündelabbildung.

BG_n ist ein CW-Raum, also existiert $i\colon BG_n \to BG$ mit $i^*(\omega) \cong \omega_n$. Damit ist $(i \circ h)^*(\omega) \cong f^*(\omega)$, also $i \circ h \simeq f$. Nun ist, da BG_n $(n-1)$-dimensional ist, in

$$H^n(BG) \xrightarrow{i^*} H^n(BG_n) \xrightarrow{h^*} H^n(B)$$

die mittlere Gruppe trivial, also auch die zusammengesetzte Abbildung. □

3.3.7. Beispiel. Für das universelle G-Bündel ω bedeutet das, daß $g(\omega) > k$, wenn $H^k(BG)$ nicht trivial ist. $S^\infty \to \mathbb{R}P^\infty$ ist ein universelles $S(2)$-Bündel. Da $H^k(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ für beliebiges k, hat dieses Bündel kein endliches Genus.

Genus einer Untergruppe

Wegen Proposition 1.1.26 und Proposition 1.1.27 ist die folgende Definition sinnvoll.

3.3.8. Definition. Sei $i\colon H \to G$ ein Monomorphismus von Gruppen. Das Genus der Gruppe H in G, bezeichnet $g(i)$, sei das Genus einer Überlagerung $p\colon Y \to X$, so daß X ein CW-Raum vom Typ $K(G,1)$ ist und die Inklusion $p_\#$ mit i korrespondiert.

3.3.9. Proposition. *Sei* $U \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} Q$ *eine kurze exakte Sequenz von Gruppen und* $g(i) \leq n$. *Dann ist für beliebige Koeffizienten die Abbildung* $p^*\colon H^n(Q) \to H^n(G)$ *trivial.*

Beweis. Man wählt einen CW-Raum X vom Typ $K(G,1)$, einen CW-Raum Y vom Typ $K(Q,1)$, sowie eine Abbildung $f\colon X \to Y$, die p realisiert. Ist $\pi\colon \tilde{Y} \to Y$ die universelle Überlagerung von Y, so ist nach Korollar 1.1.25 $g(i) = g(f^*(\pi))$. Damit ist die Behauptung auf Satz 3.3.6 zurückgeführt. $\square$

3.3.10. Bemerkung. Ist H ein Normalteiler, so gibt Proposition 3.3.9 eine rein algebraisch zu beschreibende untere Schranke für das Genus an, da die Kohomologie einer Gruppe algebraisch beschreibbar ist. Es wäre schön auch eine rein algebraische Beschreibung des Genus zu haben. Ist die untere Schranke scharf?

Nun noch ein Analogon zu Proposition 3.3.3.

3.3.11. Proposition. *Ist*

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, tail, "i"] & N \arrow[d, tail, "j"] \\
G \arrow[r, "h"] & H
\end{tikzcd}$$

ein Pull-back-Diagramm von Gruppen und N normal in H, so ist $g(i) \leq g(j)$.

Beweis. Nach Satz 1.1.22 und Proposition 1.1.26 gibt es CW-Räume X, X', Y vom Typ $K(\pi,1)$, eine Überlagerung $p\colon Y \to X$, eine Abbildung $f\colon X' \to X$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & & N \arrow[dd, "j"] \\
 & & \pi_1(Y) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dd, "p_\#"] & \\
 & G \arrow[rr, "h"] & & H \\
\pi_1(X') \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr, "f_\#"] & & \pi_1(X). \arrow[ur, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

Ist nun $p'\colon Y' \to X'$ die Zurückziehung von p durch f, so existiert nach Proposition 1.1.24 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[rr] \arrow[dd, "i"] & & N \arrow[dd, "j"] \\
\pi_1(Y') \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr] \arrow[dd, "p'_\#"] & & \pi_1(Y) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dd, "p_\#"] & \\
 & G \arrow[rr, "h"] & & H \\
\pi_1(X') \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rr, "f_\#"] & & \pi_1(X). \arrow[ur, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

Es ist $g(p') \leq g(p) = g(j)$. Y' ist ein CW-Raum, dessen höhere Homotopiegruppen alle trivial sind, im allgemeinen ist er aber nicht zusammenhängend. p' ist wie p ein H/N-Prinzipalbündel. Ist Y'' die Komponente des Basispunktes in Y', so ist $p'' := p'|_{Y''}$ eine Überlagerung und $g(p'') = g(i)$. Es ist also noch zu zeigen, daß $g(p'') \leq g(p')$. Da X' zusammenhängend ist ($\pi_0(X') = 0$), trifft jede Komponente von Y' die Faser über dem Basispunkt von X' (ist $\pi_0(F) \to \pi_0(Y')$ surjektiv). Da die Operation von H/N auf der Faser transitiv ist, gibt es zu jeder Komponente von Y' einen mit p' verträglichen Homöomorphismus $Y' \to Y'$, der diese auf die Komponente des Basispunktes abbildet. Hat man nun eine Überdeckung von X' mit offenen Mengen und über jeder dieser einen Schnitt von p', so erhält man aus jedem dieser Schnitte, indem man hinter ihn auf jeder Komponente der Menge, auf der er definiert ist, den geeigneten der gewählten Homöomorphismen schaltet, einen Schnitt von p', der in Y'' landet, und damit einen Schnitt von p''. □

3.4 Eine untere Schranke für das Polynomwurzelproblem

3.4.1. Proposition. *Die Restriktion der Abbildung ν aus Definition 3.2.4 auf $\mathfrak{B}_m - \Sigma$ ergibt einen Homöomorphismus auf ihr Bild, so daß*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^m - \Sigma \arrow[r, equal] \arrow[d, "f_m"] & \mathbb{C}[m] \arrow[d] \\
\mathfrak{B}_m - \Sigma \arrow[r, "\nu|_{\mathfrak{B}_m - \Sigma}", "\approx"'] & \mathbb{C}(m)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. □

3.4.2. Bemerkung. Der Homöomorphismus ist sogar ein Diffeomorphismus, was man daraus erkennen kann, daß die Abbildung p glatt ist und die Determinante ihrer (komplexen) Jacobi-Matrix gerade die Diskriminante.

Proposition 3.4.1 und Satz 3.3.6 werden nun zusammen mit den Kenntnissen über die Kohomologie der Zopfgruppe die wichtigsten Ingredenzien für das Finden einer unteren Schranke für die Komplexität von $P(m, \epsilon)$ sein.

3.4.3. Proposition. *Es ist $g(f_m|_{\mathfrak{A}_m - \Sigma}) = g(f_m)$.*

Beweis. $g(f_m|_{\mathfrak{A}_m - \Sigma}) \leq g(f_m)$ ist klar. $\mathfrak{A}_m - \Sigma$ enthält eine Umgebung der Null in $\mathfrak{B}_m - \Sigma$. Wegen Proposition 3.4.1 kann man statt dessen eine Umgebung der Null in $\mathbb{C}(m)$ betrachten. Ist B_ϵ eine ϵ-Kugel um die Null in $\mathbb{C}^m$, so ist $B_\epsilon - \Sigma \to (\mathfrak{B}_\epsilon - \Sigma)/S(m)$ isomorph zu $\mathbb{C}[m] \to \mathbb{C}(m)$, also $g(f_m|_{\mathfrak{A}_m - \Sigma}) \geq g(B_\epsilon - \Sigma \to (\mathfrak{B}_\epsilon - \Sigma)/S(m)) = g(\mathbb{C}[m] \to \mathbb{C}(m)) = g(f_m)$. □

3.4.4. Satz. *Für ϵ klein genug ist $g(f_m) \leq \tau(m, \epsilon) + 1$.*

Beweis. Nach Proposition 2.2.2 hat $\mathfrak{B}_m - \Sigma$ einen kompakten Deformationsretrakt A, dieser kann so gewählt werden, daß er in $\mathfrak{A}_m$ enthalten ist. Nach Korollar 3.3.5 und Proposition 3.4.3 genügt es daher, zu zeigen, daß $g(f_m|_A) \leq \tau(m, \epsilon) + 1$. Da

$$\begin{aligned} d(\bullet, \Sigma)\colon \mathbb{C}(m) &\to \mathbb{R}^+ \\ [\xi] &\mapsto \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |\xi_i - \xi_j| \end{aligned}$$

stetig ist, existiert ein $\tilde{\epsilon} > 0$, so daß für alle a aus dem Kompaktum A $d(\nu(a), \Sigma) > \tilde{\epsilon}$. Das 'klein genug' aus der Behauptung bedeute $\epsilon \leq \tilde{\epsilon}$, und so sei ϵ von nun an. Es ist also

$$d(x, y) > 2\epsilon \quad \text{für alle } x, y \in f_m^{-1}[A],\ x \neq y,\ f_m(x) = f_m(y). \tag{3.2}$$

Nach Proposition 3.2.5 existieren nun eine offene Überdeckung $\{U_k\}$ der Mächtigkeit $\tau(m, \epsilon) + 1$ von A und stetige Abbildungen $\xi_k\colon U_k \to \mathbb{C}^m$ mit

$$d(\xi_k(a), f_m^{-1}[\{a\}]) < \epsilon \quad \text{für alle } a \in U_k. \tag{3.3}$$

Man definiert nun auf U_k einen Schnitt s_k von f_m durch $d(s_k(a), \xi_k(a)) < \epsilon$, was wegen (3.3) möglich und wegen (3.2) eindeutig ist. Damit ist nur noch zu zeigen, daß s_k stetig ist. Sei dazu $a \in U_k$ beliebig und U eine Umgebung von a in U_k, so daß über U ein stetiger Schnitt $\tilde{s}_k$ existiert; dieser sei so gewählt, daß $\tilde{s}_k(a) = s_k(a)$. Nach Definition und Eindeutigkeit von s_k ist nun $\{b : s_k(b) = \tilde{s}_k(b)\} = \{b : d(\tilde{s}_k(b), \tilde{\xi}_k(b)) < \epsilon\}$, also eine Umgebung von a. Damit ist s_k in a stetig. □

3.4.5. Definition. Für natürliche Zahlen n und b, $b \geq 2$ bezeichne $D_b(n)$ die Summe der Ziffern in der b-adischen Darstellung von n. Weiterhin sei $D(n) := \min_{p \text{ prim}} D_p(n)$.

3.4.6. Satz. *Für eine beliebige Primzahl p ist*

$$g(f_m) \geq m - D_p(m) + 1.$$

Beweis. $g(f_m)$ ist gerade das Genus von $I(m)$ in $\mathrm{Br}(m)$. m läßt sich als Summe von $D_p(m)$ Potenzen von p darstellen, etwa

$$m = m_1 + \cdots + m_k, \quad k = D_p(m), \quad \text{alle } m_i \text{ Potenzen von } p.$$

Man betrachtet nun das Pull-back-Diagramm

$$\begin{tikzcd} I(m_1) \times \cdots \times I(m_k) \arrow[r] \arrow[d, tail] & I(m) \arrow[d, tail] \\ \mathrm{Br}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{Br}(m_k) \arrow[r] & \mathrm{Br}(m) \end{tikzcd}$$

mit der Abbildung aus Proposition 2.1.9. Nach Proposition 3.3.11 ist

$$g\big(I(m) \subset \mathrm{Br}(m)\big) \geq g\big(I(m_1) \times \cdots \times I(m_k) \subset \mathrm{Br}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{Br}(m_k)\big)$$

. Der Kokern dieser Inklusion ist

$$\mathrm{Br}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{Br}(m_k) \twoheadrightarrow S(m_1) \times \cdots \times S(m_k).$$

Nach Proposition 3.3.9 folgt die Behauptung, wenn die induzierte Kohomologieabbildung in Dimension $m - D_p(m) = m - k$ nicht trivial ist. Uns interessiert in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^{m_1-1}(S(m_1)) \otimes \cdots \otimes H^{m_k-1}(S(m_k)) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & H^{m-k}(S(m_1) \times \cdots \times S(m_k)) \arrow[d] \\
H^{m_1-1}(\mathrm{Br}(m_1)) \otimes \cdots \otimes H^{m_k-1}(\mathrm{Br}(m_k)) \arrow[r, tail] & H^{m-k}(\mathrm{Br}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{Br}(m_k))
\end{tikzcd}$$

also die rechte Spalte. Die waagerechten Abbildungen sind das Kreuzprodukt und nach dem Satz von Künneth (Proposition 1.2.16) injektiv. Seien nun alle Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in $\pm\mathbb{Z}$. Die linke Abbildung ist dann nach Satz 2.3.10 surjektiv. Die Gruppe links unten ist nach Satz 2.3.7 isomorph zu $\mathbb{Z}_p \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$, also nicht trivial. Also ist auch die rechte Abbildung nicht trivial. $\square$

Zusammen mit Satz 3.4.4 ergibt dies

3.4.7. Korollar. *Für ϵ klein genug ist $\tau(m, \epsilon) \geq m - D(m)$.* $\square$

3.5 Eine obere Schranke für das Polynomwurzelproblem

3.5.1. Satz. *Für beliebiges $\epsilon > 0$ ist $\tau(m, \epsilon) \leq m - 1$.*

Beweis. Da die Maximums- und die Minimumsfunktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig sind, ist auch die Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die die Koordinaten der Größe nach ordnet, stetig; $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/S(n)$ hat also einen stetigen Schnitt. Damit sieht man, daß für

$$C_k := \big\{a \in \mathfrak{A}_m \colon |\{\Re(\xi_i)\}| = k,\, [\xi] = \nu(a)\big\}.$$

auch auf jedem C_k ein stetiger Schnitt s_k von p existiert. Es ist $\mathfrak{A}_m = \bigcup_{1 \leq k \leq m} C_k$. Sei nun

$$U_k := \left\{a \colon d(a, C_k) < 2^{-2k+1}\epsilon,\, d(a, C_{k-1}) > 2^{-2k+2}\epsilon\right\}.$$

Die U_k sind offen und es gilt $\mathfrak{A}_m = \bigcup_{1 \leq k \leq m} U_k$. Ist nun $a \in U_k$, so existiert genau ein $a^* \in C_k$ mit $d(a, a^*) = d(a, C_k)$ und die Abbildung $a \mapsto a^*$ ist stetig. Für alle $a \in U_k$ ist $d(p(s_k(a^*)), a) < \epsilon$. Die Behauptung folgt nun mit Proposition 3.2.6. $\square$

Anhang A

Praktische Berechnung einiger Kohomologiegruppen

Ich habe ausgehend von dem im zweiten Abschnitt beschriebenen Kettenkomplex ein Programm geschrieben, das die Kohomologiegruppen der Zopfgruppe und der symmetrischen Gruppe berechnet.

A.1 Ergebnisse

Tabelle A.1 zeigt die Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ der Zopfgruppen mit bis zu 10 Fäden. Die Werte sind auch schon in [1] aufgeführt. Dort werden sie mit anderen Methoden und weniger Rechenaufwand erhalten.

Tabelle A.2 zeigt die entsprechenden Werte für Koeffizienten in $\pm\mathbb{Z}$. Tabelle A.3 und Tabelle A.4 zeigen einige Kohomologiegruppen der symmetrischen Gruppen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ beziehungsweise $\pm\mathbb{Z}$. Leere Felder bedeuten hier *nicht*, daß die Gruppen trivial sind.

A.2 Teile des Programms

Ich stelle hier die Teile des Programms vor, die in diesem Rahmen interessant sind. Dies sind ein Modul mit Hilfsfunktionen, das ich zeige, um die Darstellung in sich abgeschlossen zu halten, und das Modul, das den Kettenkomplex berechnet. Der Rest des Programms besteht aus allgemeineren Modulen, die aus einem Kettenkomplex die Bettizahlen und Torsionskoeffizienten berechnen. Dies sind Standardalgorithmen, die ich hier nicht wiedergebe.

Das Programm ist in der Programmiersprache Haskell [7] geschrieben. Da diese nicht sehr verbreitet ist, möchte ich die Wahl kurz erläutern. Haskell ist eine funktionale Programmiersprache, und deren Ausdruckskraft erlaubt es häufig, schnell eine korrekte, wenn auch leider manchmal nicht besonders effiziente, Implementierung eines Algorithmus zu erhalten. Die einfache Semantik solcher Sprachen macht Korrektheitsbeweise von Programmen deutlich einfacher als in imperativen Programmiersprachen; hier wurde jedoch

$m \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$								
3	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0							
4	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$						
5	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0					
6	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$				
7	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	0			
8	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$		
9	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	0	
10	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_5$

Tabelle A.1: $H^k(\mathrm{Br}(m); \mathbb{Z})$

nichts derartiges versucht. Ein angenehmes Detail ist, daß der Standarddatentyp `Integer`, den ich bei der Manipulation der Matrizen verwandt habe, beliebig lange ganze Zahlen zuläßt, so daß man sich sicher sein kann, daß keine unentdeckten Überläufe stattgefunden haben. Ich werde weder hier noch in den Kommentaren zum Quelltext versuchen, die Sprache zu erklären. Als Einführung eignet sich [6].

`LinearAlgebra`

Dieses Modul stellt Datentypen zur Darstellung von $\mathbb{Z}_2$ und von freien Moduln zur Verfügung.

```
module LinearAlgebra where

infix  7 `timesFM`
infixr 6 `addFM`, `subFM`
```

`Z2` stellt Elemente aus $\mathbb{Z}_2$ dar.

```
data Z2 = Zero | One
        deriving (Text, Eq)
```

`m1pow` $x = (-1)^x$.

```
m1pow :: Num a => Z2 -> a
m1pow Zero =  1
m1pow One  = -1
```

In $\mathbb{Z}_2$ kann man rechnen.

```
instance Num Z2 where
        x + Zero = x
```

$m \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	$\mathbb{Z}_2$								
3	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$							
4	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$						
5	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_5$					
6	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{10}$	0				
7	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_7$			
8	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_2$		
9	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	
10	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_6$	0

Tabelle A.2: $H^k(\mathrm{Br}(m); \pm\mathbb{Z})$

```
        Zero + One = One
        One + One = Zero
        x - Zero = x
        Zero - One = One
        One - One = Zero
        x * One = x
        x * Zero = Zero
        negate x = x
        fromInt n = if odd n then One else Zero

instance Fractional Z2 where
        recip One = One
        x / One = x
        x / Zero = error "devision by Zero::Z2"
```

Werte vom Typ `FreeModule` α β sind Linearkombinationen von Werten des Typs β mit Koeffizienten des Typs α. α sollte ein numerischer Typ sein und β ein vergleichbarer. Ich stelle die Linearkombination einfach als eine Liste von Paaren des Typs (α, β) dar, Wiederholungen sind erlaubt. Das ist keine sonderlich effiziente Darstellung.

```
type FreeModule a b = [(a, b)]
```

`zeroFM` ist die Null, n `` `timesFM` `` b, das Element nb, `onceFM` b das Element b.

```
zeroFM :: FreeModule a b
zeroFM = []

timesFM :: a -> b -> FreeModule a b
timesFM n b = [(n,b)]
```

$m\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$
3	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_6$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_6$
4	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$
5	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{60}$
6	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$			
7	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$				
8	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$					

Tabelle A.3: $H^k(S(m);\mathbb{Z})$

```
onceFM :: Num a => b -> FreeModule a b
onceFM b = 1 `timesFM` b
```

`FreeModule` α ist ein Funktor.

```
mapFM :: (b -> c) -> FreeModule a b -> FreeModule a c
mapFM f = map (\(n, b)-> (n, f b))
```

Summe, Differenz und Produkt mit einem Skalar.

```
addFM, subFM :: Num a =>
    FreeModule a b -> FreeModule a b -> FreeModule a b
addFM = (++)
subFM x x' = addFM x (negateFM x')

negateFM :: Num a => FreeModule a b -> FreeModule a b
negateFM = map (\(n,b) -> (-n,b))

multFM :: Num a => a -> FreeModule a b -> FreeModule a b
multFM m = map (\(n, b) -> (m*n, b))
```

`coeff` x b ist der Koeffizient von b in x.

```
coeff :: (Num a, Eq b) => FreeModule a b -> b -> a
coeff linComb b
    = (sum . map fst . filter ((==b) . snd)) linComb

eqFM :: (Num a, Eq b) =>
        FreeModule a b -> FreeModule a b -> Bool

eqFM lc1 lc2 = all eqElem elems where
    eqElem x = coeff lc1 x == coeff lc2 x
    elems = map fst (lc1 ++ lc2)
```

$m\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	0
3	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	0
4	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
5	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
6	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$			
7	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$				
8	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$					

Tabelle A.4: $H^k(S(m); \pm\mathbb{Z})$

`Trees`

Dieses Modul beschreibt die Basen $T_n^{\mathbf{o}}(m)$ und die zugehörigen Randoperatoren.

```
module Trees(
    Tree, trees, ftrees, depth, cutTree,
        boundaryZ, boundaryPMZ,
    BraidCell(..), braidCells, treeToBraidCell,
        braidBoundaryPMZ, braidBoundaryZ) where

import Prelude
        renaming (genericLength to length,
                  length to lengthInt)
import Utils(binomInt)
import LinearAlgebra
```

Die Elemente aus $T_\infty^{\mathbf{o}}(m)$: Das einzige Element aus $T_\infty^{\mathbf{o}}(1)$ stelle ich durch `Straight` dar, ein Element $\big(r, (t_1, \ldots, t_{|r|})\big)$ durch `Fork` gefolgt von einer Liste der Darstellungen von $t_1, \ldots, t_{|r|}$ in der richtigen Reihenfolge.

```
data Tree = Straight | Fork [Tree]
        deriving (Eq)
```

Die Funktion `norm` bildet eine Liste mit den korrekten Darstellungen von $t_1, \ldots, t_l$ auf die korrekte Darstellung von $\big(r, (t_1, \ldots, t_l)\big)$ ab. Die Idee ist, nirgends ein `Fork [Straight]` zu erhalten, da dies das gleiche bezeichnen würde wie `Straight`.

`denorm` ist das Gegenstück zu `norm`.

```
norm :: [Tree] -> Tree
norm [Straight] = Straight
norm ts = Fork ts
```

```
denorm :: Tree -> [Tree]
denorm Straight = [Straight]
denorm (Fork ts) = ts
```

Für $t \in T^{\mathrm{o}}_{\infty}(m)^k$ ist `treeInfo` $t = (m, n, k)$, wobei n die kleinste Zahl ist, so daß $t \in \operatorname{Im} i_{n,\infty}$.

```
treeInfo :: (Num a, Num b, Ord b) => Tree -> (a, b, a)
treeInfo Straight = (1, 0, 0)
treeInfo (Fork ts) =
    (m, 1+maximum ds, m - length ts + sum cds) where
        (ms, ds, cds) = unzip3 (map treeInfo ts)
        m = sum ms


breadth, codim :: Num a => Tree -> a
depth :: (Num a, Ord a) => Tree -> a

breadth t = m  where (m,d,cd) = treeInfo t
depth   t = d  where (m,d,cd) = treeInfo t
codim   t = cd where (m,d,cd) = treeInfo t
```

Für $t \in \mathfrak{T}_n(m)_k$ ist `dim` n $(i_{n,\infty} t) = k$.

```
dim :: Num a => a -> Tree -> a
dim n t = n*m-cd where (m,d,cd) = treeInfo t
```

`cutTree` n ist eine Variante von $p_{\infty,n}$, es ist

$$\texttt{cutTree}\ n\ t = \begin{cases} [t], & t \in \operatorname{Im} i_{n,\infty} \\ [], & \text{sonst.} \end{cases}$$

```
cutTree :: Int -> Tree -> [Tree]

cutTree n t = if ok n t then [t] else [] where
    ok 0     Straight  = True
    ok 0     (Fork ts) = False
    ok (n+1) Straight  = True
    ok (n+1) (Fork ts) = all (ok n) ts
```

Nun kommt ein interessanterer Teil. `trees` m k liefert eine Liste, die jedes Element aus $T^{\mathrm{o}}_{\infty}(m)^k$ genau einmal enthält; ebenso `ftrees` n m k für $T^{\mathrm{o}}_{n}(m)^k$.

```
trees  ::        Int -> Int -> [Tree]
ftrees :: Int -> Int -> Int -> [Tree]
```

Wir definieren zunächst für $t = \bigl(r, (t_1, \dots, t_l)\bigr) \in T_n^{\mathbf{o}}(m)$ ein Element aus $T_n^{\mathbf{o}}(m+1)$ durch $b_0 t := \bigl(r', (t_0, t_1, \dots, t_l)\bigr)$, wobei $t_0 \in T_n^{\mathbf{o}}(1)$ und r' geeignet sei. Definiert man weiterhin $b_{i+1} t := \bigl(r'', (b_i t_1, t_2, \dots, t_l)\bigr)$, so erhält man für $0 \le i < n$ Abbildungen $b_i \colon T_n^{\mathbf{o}}(m)^k \to T_n^{\mathbf{o}}(m+1)^{k+i}$.

```
broadenAtLevel :: Int -> Tree -> Tree

broadenAtLevel 0     = norm . (Straight :) . denorm
broadenAtLevel (i+1) = norm . f . denorm
    where
        f (t:ts) = broadenAtLevel i t : ts
```

Als nächstes bemerkt man, daß sich für $m > 1$ jedes Element aus $T_n^{\mathbf{o}}(m)$ eindeutig auf diese Weise aus einem Element aus $T_n^{\mathbf{o}}(m-1)$ erhalten läßt. Damit können wir $T_n^{\mathbf{o}}(m)^k$ aufzählen, denn wir haben die disjunkte Vereinigung $T_n^{\mathbf{o}}(m)^k = \bigcup_{i=0}^{n-1} \bigl\{ b_i t \colon t \in T_n^{\mathbf{o}}(m-1)^{k-i} \bigr\}$.

```
trees 1 0  = [Straight]
trees 1 k  = []
trees m k  =
    [ t | i <- [0..k],
          t <- map (broadenAtLevel i) (trees (m-1) (k-i))]

ftrees n 1 0 = [Straight]
ftrees n 1 k = []
ftrees n m k =
    [ t | i<-[0..min (n-1) k],
          t<-map (broadenAtLevel i) (ftrees n (m-1) (k-i))]
```

Insbesondere können wir $T_n^{\mathbf{o}}(m)^k$ auch zählen.

A.2.1. Proposition. *Für $m > 1$ ist $\bigl|T_n^{\mathbf{o}}(m)^k\bigr| = \sum_{i=0}^{n-1} \bigl|T_n^{\mathbf{o}}(m-1)^{k-i}\bigr|$ und $\bigl|T_\infty^{\mathbf{o}}(m)^k\bigr| = \sum_{i=0}^{\infty} \bigl|T_\infty^{\mathbf{o}}(m-1)^{k-i}\bigr|$.* □

A.2.2. Korollar. *Es ist $\bigl|T_n^{\mathbf{o}}(m)^k\bigr| = \binom{m-1}{k}$ und $\bigl|T_\infty^{\mathbf{o}}(m)^k\bigr| = \binom{m-2+k}{k}$.* □

Nun kommen wir zu dem harten Teil: der Randabbildung. Ich beschränke auf die Koeffizientenmoduln $\mathbb{Z}$ und $\pm\mathbb{Z}$. Für andere wäre der Verwaltungsaufwand größer. Bei diesen jedoch hängt die Operation eines Elements $\pi \in S(m)$ nur von $\operatorname{sgn} \pi$ ab. Sieht man $\operatorname{sgn} \pi$ als Element von $\mathbb{Z}_2$, so werden die Operationen also durch die folgenden beiden Funktionen charakterisiert, sie werden den Funktionen, die die Randabbildung berechnen, als Parameter übergeben werden.

```
tau_opZ, tau_opPMZ :: Num a => Z2 -> a
```

```
tau_opZ _ = 1

tau_opPMZ Zero =  1
tau_opPMZ One  = -1
```

Im Herz der Randabbildung steht der Ausdruck

$$\sum_{\pi \in S_{t_i, t_{i+1}}} \Big((\pi^{-1})^* (t^{(i,\pi)}) \otimes (\operatorname{sgn} \pi') \epsilon_\pi (\pi \cdot a) \Big)$$

mit $t = \big(r, (t_1, \ldots, t_{|r|})\big)$. Für gegebenes t_1 und t_2 berechnet nun die Funktion `mixWithCoeff` zunächst

$$\sum_{\pi \in S_{t_1, t_2}} \Big((\pi^{-1})^* (t_1 \cdot_\pi t_2) \otimes (\operatorname{sgn} \pi') \epsilon_\pi (\pi \cdot a) \Big) .$$

Sind $t_1 \in T_n^{\mathbf{o}}(m_1)$, $t_2 \in T_n^{\mathbf{o}}(m_2)$, so hängt ϵ_π von n ab, zumindest modulo 2. n ist daher Parameter der Funktion. Ist $t_i = \big(r_i, (t_1^i, \ldots, t_{|i_1|}^i)\big)$, $i = 1, 2$, so berechnet `mixWithCoeff` zunächst den von π unabhängigen Faktor von ϵ_π, nämlich $(-1)^{|r_2|(|t_1|-|r_1|)}$. Die eigentliche Arbeit überläßt es dann `mixWC`, dem es die t_j^i zusammen mit den $(m_j^i, |t_j^i|)$ übergibt, wobei $t_j^i \in T_{n-1}^{\mathbf{o}}(m_j^i)$.

```
mixWithCoeff :: Num a => (Z2->a) -> Z2 -> Tree -> Tree
                                -> FreeModule a Tree

mixWithCoeff tau_op n t1 t2
    = c `multFM`
       mapFM norm (mixWC tau_op t1s (f t1s) t2s (f t2s))
    where
        t1s = denorm t1
        t2s = denorm t2
        c = m1pow (abs_r t2*(dim n t1-abs_r t1))
        f = map g where
            g t = (m,d) where
                (m,_,cd) = treeInfo t
                d = (n-1)*m-cd
        abs_r  = length.denorm
```

`mixWC` bildet nun alle Permutationen der t_j^i, die innerhalb der t_j^1 beziehungsweise t_j^2 die Reihenfolge erhalten, zusammen mit den richtigen Koeffizienten. Dabei trägt `m1pow (length p1s)` zu $\operatorname{sgn} \pi'$, `m1pow(d2*d1sum)` zu $\operatorname{sgn}' \pi'$ und `tau_op (m2*m1sum)` zu der Operation von π bei.

```
mixWC :: Num a =>
        (Z2->a) ->
```

```
        [Tree] -> [(Z2,Z2)] ->
        [Tree] -> [(Z2,Z2)]
            -> FreeModule a [Tree]

mixWC tau_op [] _ ts _ = onceFM ts
mixWC tau_op ts _ [] _ = onceFM ts
mixWC tau_op t1s@(t1:t1s') p1s@(_:p1s')
             t2s@(t2:t2s') p2s@((m2,d2):p2s')
    = mapFM (t1:) (mixWC tau_op t1s' p1s' t2s p2s)
      `addFM`
      s `multFM` mapFM (t2:) (mixWC tau_op t1s p1s t2s' p2s')
      where
        s = m1pow (length p1s+d2*d1sum)
                * tau_op (m2*m1sum)
        m1sum = (sum.map fst) p1s
        d1sum = (sum.map snd) p1s
```

Die eigentliche Funktion für den Randoperator, `boundary`, ist nun kein Problem mehr. `part1` entspricht der ersten Summe, `part2` der zweiten.

```
boundary :: Num a => (Z2->a) -> Z2 -> Tree -> FreeModule a Tree

boundary tau_op n Straight = zeroFM
boundary tau_op n (Fork ts)
    = mapFM norm (part1 `addFM` part2)
    where
        part1 = negateFM (p1 ts)
        p1 []  = zeroFM
        p1 [_] = zeroFM
        p1 (t1:t2:ts) =
            mapFM (:ts) (mixWithCoeff tau_op (n-1) t1 t2)
            `subFM` mapFM (t1:) (p1 (t2:ts))
        part2 = multFM (m1pow (length ts)) (p2 ts)
        p2 [] = zeroFM
        p2 (t:ts) =
            mapFM (:ts) (boundary tau_op (n-1) t)
            `addFM` multFM (m1pow (dim (n-1) t))
                        (mapFM (t:) (p2 ts))
```

`boundaryZ` und `boundaryPMZ` sind die exportierten Funktionen zur Berechnung des Randoperators mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ beziehungsweise $\pm\mathbb{Z}$. Da wir T_∞ als direkten Limes der T_n mit geradem n definiert haben, übergeben sie `Zero` an `boundary`.

```
boundaryZ, boundaryPMZ :: Num a => Tree -> FreeModule a Tree
```

```
boundaryZ   = boundary tau_opZ Zero
boundaryPMZ = boundary tau_opPMZ Zero
```

Für Elemente aus $T_2^o(m)$ wähle ich die einfachere Darstellung, die auch in Proposition 2.3.6 und Proposition 2.3.11 benutzt wurde.

```
type BraidCell = [Int]
```

Einen Baum der Tiefe höchstens 2 in diese Darstellung umzuwandeln ist eine einfache Zählaufgabe.

```
treeToBraidCell :: Tree -> BraidCell

treeToBraidCell Straight = [1]
treeToBraidCell (Fork ts) = map countStraights ts where
    countStraights Straight = 1
    countStraights (Fork ts) = foldl (\n Straight->1+n) 0 ts
```

Das Auflisten aller Elemente aus $T_2^o(m)^k$ geht genau wie oben. In der Tat hätte man

```
braidCells m k = map (treeToBraidCell) (ftrees 2 m k)
```

schreiben können.

```
braidCells :: Int -> Int -> [BraidCell]

braidCells 1 0 = [[1]]
braidCells 1 k = []
braidCells n k = [ 1:ms | ms <- braidCells (n-1) k ]
    ++ [ (1+m):ms | (m:ms)<-braidCells (n-1) (k-1) ]
```

Die Randabbildungen sind genaue Umsetzungen von Proposition 2.3.6 und Proposition 2.3.11.

```
braidBoundaryPMZ, braidBoundaryZ ::
        Integral a => BraidCell -> FreeModule a BraidCell

braidBoundaryPMZ = braidBoundary binomInt
braidBoundaryZ   = braidBoundary c where
    c n k
        | even n && odd k = 0
        | otherwise       = binomInt (n `div` 2) (k `div` 2)


braidBoundary :: Integral a =>
```

```
        (Int->Int->a) -> BraidCell -> FreeModule a BraidCell

braidBoundary coeff [n]   = zeroFM
braidBoundary coeff (n1:n2:ns) =
  (-(coeff (n1+n2) n1)) `timesFM` (n1+n2:ns)
  `subFM`
  mapFM (n1:) (braidBoundaryZ (n2:ns))
```

Literatur

[1] Arnol'd, V. I. *On some topological invariants of algebraic functions.* Trans. Moscow Math. Soc., **21**, 30–52, 1970.

[2] Bredon, G. E. *Topology and Geometry*, Bd. 139 von *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, 1993.

[3] Dold, A. *Lectures on Algebraic Topology*, Bd. 200 von *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen.* Springer-Verlag, 1972.

[4] Fuchs, D. B. *Chohomologies of the braid group modulo* 2. Funct. Anal. Appl., **4**, 143–151, 1970.

[5] Hilton, P. J. und Stammbach, U. *A Course on Homological Algebra*, Bd. 4 von *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, 1971.

[6] Hudak, P. und Fasel, J. H. *A gentle introduction to Haskell.* SIGPLAN Notices, **27**, Nr. 5, Mai 1992. URL=`ftp://ftp.dcs.glasgow.ac.uk/pub/haskell/tutorial/tutorial.ps.Z`.

[7] Hudak, P., Peyton Jones, S. L. und Wadler, P. *Report on the programming language Haskell, a non-strict purely functional language (version 1.2).* SIGPLAN Notices, März 1992. URL=`ftp://ftp.dcs.gla.ac.uk/pub/haskell/report/report-1.2.ps.Z`.

[8] Husemoller, D. *Fibre Bundles*, Bd. 20 von *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, 1966.

[9] Rourke, C. P. und Sanderson, B. J. *Introduction to Piecewise-Linear Topology.* Springer-Verlag, 1982.

[10] Schwarz, A. S. *The genus of a fibre space.* Trudy Moskov. Math. Obshch., **10**, 217–272, 1961.

[11] ———. *The genus of a fibre space.* American Mathematical Society Translations, **55**, Nr. 2, 49–140, 1966. Übersetzung von [10].

[12] Smale, S. *On the topology of algorithms, I.* Journal of Complexity, **3**, 81–89, 1987.

[13] Spanier, E. *Algebraic Topology.* McGraw-Hill, New York, 1966.

[14] Vainshtein, F. V. *Cohomologies of braid groups.* Funct. Anal. Appl., **12**, 135–137, 1978.

[15] Vassiliev, V. A. *Cohomology of braid groups and the complexity of algorithms.* Funktsional. Anal. i Prilozhen, **22**, Nr. 3, 15–24, 1989.

[16] ———. *Complements of Discriminants of Smooth Maps: Topology And Applications*, Bd. 98 von *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, 1992.