Lieferung 14

Die Fundamentalgruppe

Wege

14.1. Definition. Seien X ein Raum und $w, w' \colon I \to X$ Wege in X mit $w(1) = w'(0)$. Wie bei der Diskussion des Wegzusammenhangs bezeichnen wir mit w^- den Weg

$$\begin{aligned} w^- \colon I &\to X \\ t &\mapsto w(1-t) \end{aligned}$$

und mit $w * w'$ den Weg

$$\begin{aligned} w * w' \colon I &\to X \\ t &\mapsto \begin{cases} w(2t), & t \leq \frac{1}{2}, \\ w'(2t-1), & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Außerdem bezeichnen wir für $x \in X$ mit c_x den konstanten Weg

$$\begin{aligned} c_x \colon I &\to X \\ t &\mapsto x, \end{aligned}$$

der in $\{x\}$ verläuft.

14.2. Proposition. *Seien X, Y Räume, $f \colon X \to Y$ stetig, $w, w' \colon I \to X$ stetig mit $w(1) = w'(0)$. Dann ist $(f \circ w)(1) = (f \circ w')(0)$ und $(f \circ w) * (f \circ w') = f \circ (w * w')$.* □

14.3. Proposition. *Sind $v, v', w, w' \colon I \to X$ stetig mit $v(1) = w(0)$, und ist $v \simeq v' \operatorname{rel} \{0,1\}$, $w \simeq w' \operatorname{rel} \{0,1\}$, so ist $v * w \simeq v' * w' \operatorname{rel} \{0,1\}$.*

Beweis. Sei F die Homotopie zwischen v und v', G die Homotopie zwischen w und w'. Dann ist

$$\begin{aligned} I \times I &\to X \\ (s,t) &\mapsto \begin{cases} F(2s, t), & s \leq \frac{1}{2}, \\ G(2s-1, t), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen $v * w$ und $v' * w'$, und diese Homotopie hält $\{0,1\}$ (sogar $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$) fest. □

14.4. Proposition. *Sei X ein Raum, $w, w', w''\colon I \to X$ stetig, $w(1) = w'(0)$, $w'(1) = w''(0)$. Dann gilt:*

(i) $(w * w') * w'' \simeq w * (w' * w'') \quad \text{rel } \{0,1\}$,

(ii) $c_{w(0)} * w \simeq w \simeq w * c_{w(1)} \quad \text{rel } \{0,1\}$,

(iii) $w * w^- \simeq c_{w(0)} \quad \text{rel}\{0,1\}$.

Beweis. Zu (i): Man kann die Homotopie direkt angeben, und das sei zur Übung empfohlen. Wir gehen hier etwas anders vor: Wir definieren zunächst

$$\begin{aligned} f\colon [0,3] &\to X \\ s &\mapsto \begin{cases} w(s), & 0 \le s \le 1, \\ w'(s-1), & 1 \le s \le 2, \\ w''(s-2), & 2 \le s \le 3, \end{cases} \end{aligned}$$

f ist stetig, und für $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} l_{a,b}\colon I &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto s \cdot b + (1-s) \cdot a. \end{aligned}$$

Dann ist zum Beispiel $w' = f \circ l_{1,2}$, also $(w * w') * w'' = f \circ ((l_{0,1} * l_{1,2}) * l_{2,3})$ und $w * (w' * w'') = f \circ (l_{0,1} * (l_{1,2} * l_{2,3}))$. Wegen Proposition 13.14 genügt es nun, zu zeigen, dass

$$(l_{0,1} * l_{1,2}) * l_{2,3} \simeq l_{0,1} * (l_{1,2} * l_{2,3}) \quad \text{rel } \{0,1\}\,,$$

beide Seiten aufgefasst als Wege in $[0,3]$. Da beide Wege Anfangspunkt 0 und Endpunkt 3 haben, folgt dies aber mit Proposition 13.15 aus der Konvexität von $[0,3]$.

Zu (ii): Es ist $c_{w(0)} * w = w \circ (c_0 * \mathrm{id}_I)$ und $w = w \circ \mathrm{id}_I$. Nun sind $c_0 * \mathrm{id}_I$ und id_I beides Wege in I mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt 1 und $c_{w(0)} * w \simeq w$ rel $\{0,1\}$ folgt wie eben, und $w \simeq w * c_{w(1)}$ rel $\{0,1\}$ ebenso.

Zu (iii): Wie eben mit $w * w^- = w \circ (l_{0,1} * l_{1,0})$, $c_{w(0)} = w \circ c_0$. □

Die Fundamentalgruppe

Diese Untersuchungen machen die folgende Definition möglich.

14.5. Definition. Sei X ein Raum und $x_0 \in X$. Dann bezeichnen wir mit $\pi_1(X, x_0)$ die Menge der Äquivalenzklassen von stetigen Wegen $w\colon I \to X$ mit $w(0) = w(1) = x_0$ bezüglich Homotopie relativ zu $\{0,1\}$. Einen Weg w mit $w(0) = w(1) = x_0$ nennen wir einen *geschlossenen Weg bei x_0* oder eine *Schleife bei x_0*.

Auf $\pi_1(X, x_0)$ ist durch

$$[w] \cdot [w'] := [w * w']$$

eine Multiplikation erklärt, die $\pi_1(X, x_0)$ zu einer Gruppe mit neutralem Element $[c_{x_0}]$ macht. $\pi_1(X, x_0)$ heißt die *Fundamentalgruppe* von X mit *Basispunkt* x_0.

14.6. Definition. Ein *Raum mit Basispunkt* ist ein Paar (X, x_0), wobei X ein Raum ist und $x_0 \in X$. Sind (X, x_0), (Y, y_0) Räume mit Basispunkt, so heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ *basispunkterhaltend*, wenn $f(x_0) = y_0$. Wir schreiben hierfür $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Sind $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ basispunkterhaltende Abbildungen, so werden wir unter einer Homotopie zwischen f und g, wenn wir nichts anderes bemerken, immer eine Homotopie relativ zu $\{x_0\}$ verstehen. Wollen wir explizit sagen, dass eine Homotopie nicht relativ zum Basispunkt zu sein braucht, so reden wir von einer *freien Homotopie*.

14.7. Definition und Proposition. *Seien (X, x_0) und (Y, y_0) Räume mit Basispunkt, $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ stetig. Dann definieren wir*

$$\begin{aligned} \pi_1(f)\colon \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [w] &\mapsto [f \circ w]. \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert und ein Homomorphismus von Gruppen. An Stelle von $\pi_1(f)$ schreiben wir auch $f_\#$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit folgt aus Proposition 13.14, die Verträglichkeit mit der Multiplikation aus Proposition 14.2. □

14.8. Proposition. *Seien (X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0) Räume mit Basispunkt, $f, f'\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $g\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ stetig. Dann gilt:*

(i) Ist $f \simeq f'$ (relativ zu $\{x_0\}$), so ist $\pi_1(f) = \pi_1(f')$.

(ii) Es ist $\pi_1(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(iii) Es ist $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$.

Beweis. (i) folgt aus Proposition 13.14, (ii) und (iii) sind klar. □

Die Fundamentalgruppe erlaubt es uns, topologische Situationen in algebraische zu übersetzen, wobei man dann hofft, das letztere einfacher sind. Zum Beispiel hat man:

14.9. Proposition. *Seien (X, x_0), (Y, y_0) Räume mit Basispunkt, $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $g\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ stetig. Ist $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,x_0)}$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(Y,y_0)}$, so ist $f_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Aus $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,x_0)}$ folgt $g_\# \circ f_\# = (g \circ f)_\# = (\mathrm{id}_{(X,x_0)})_\# = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$. Aus $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(Y,y_0)}$ folgt, dass $f_\# \circ g_\# = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$. Das heißt gerade, dass $f_\#$ ein Isomorphismus und invers zu $g_\#$ ist. □

Da wir hier fordern, dass die Homotopien den Basispunkt erhalten, ist die Voraussetzung der Proposition stärker als die Homotopieäquivalenz von X und Y. Das werden wir jedoch noch beheben. Haben wir das getan, und wissen wir dann von zwei Räumen, dass sie nicht isomorphe Fundamentalgruppen haben, so werden wir also wissen, dass sie nicht homotopieäquivalent sind. Bisher allerdings wissen wir nicht einmal, dass es einen Raum gibt, dessen Fundamentalgruppe nicht trivial ist, doch wir werden noch Hilfsmittel kennenlernen, um die Fundamentalgruppen in vielen Situationen zu bestimmen.

Der Einfluss des Basispunktes

Da I (der Raum in dem Wege starten) und $I \times I$ (der Raum in dem Homotopien von Wegen starten) wegzusammenhängend sind, ‚sieht' $\pi_1(X, x_0)$ nur die Wegkomponente von X, in der x_0 liegt. Liegen allerdings x_0 und x_1 in der selben Wegkomponente, so werden wir nun sehen, dass $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph sind.

14.10. Definition. Sei X ein Raum und $p\colon I \to X$ stetig, $p(0) = x_0$, $p(1) = x_1$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} h_p\colon \pi_1(X, x_1) &\to \pi_1(X, x_0) \\ [w] &\mapsto [p * w * p^-]. \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit folgt aus Proposition 14.3 (und Proposition 14.4).

14.11. Proposition. *Sei X ein Raum, $p, p', q\colon I \to X$ stetig, $p(1) = q(0)$, $x_0 \in X$. Dann gilt:*

(i) h_p ist ein Homomorphismus.

(ii) Ist $p \simeq p'$ rel $\{0,1\}$, so ist $h_p = h_{p'}$.

(iii) Es ist $h_{c_{x_0}} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

(iv) Es ist $h_{p*q} = h_p \circ h_q$.

Beweis. Das sind alles einfache Folgerungen aus Proposition 14.4. □

14.12. Proposition. *Sei X ein Raum, $x_0, x_1 \in X$. Liegen x_0, x_1 in der selben Wegkomponente von X, so ist $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$, denn für jeden stetigen Weg $p\colon I \to X$ mit $p(0) = x_0$, $p(1) = x_1$ ist*

$$h_p\colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$$

ein Isomorphismus. Sind p, q zwei solche Wege, so ist $q * p^-$ eine Schleife bei x_0 und mit $\alpha := [q * p^-] \in \pi_1(X, x_0)$ ist

$$h_q(\beta) = \alpha h_p(\beta)\alpha^{-1} \qquad \textit{für alle } \beta \in \pi_1(X, x_0),$$

h_p und h_q unterscheiden sich also um einen inneren Automorphismus von $\pi_1(X, x_0)$.

Beweis. Ist p ein stetiger Weg von x_0 nach x_1, so ist $h_p \circ h_{p^-} = h_{p*p^-} = h_{c_{x_0}} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ und ebenso $h_{p^-} \circ h_p = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_1)}$. Damit ist h_p ein Isomorphismus.

Ist q ein weiterer stetiger Weg von x_0 nach x_1 und w eine Schleife in x_1, so ist

$$\begin{aligned} h_q([w]) &= [q * w * q^-] \\ &= [q * p^- * p * w * p^- * p * q^-] \\ &= [q * p^-] \cdot [p * w * p^-] \cdot [p * q^-] \\ &= [q * p^-] \cdot h_p([w]) \cdot [(q * p^-)^-] \\ &= [q * p^-] \cdot h_p([w]) \cdot [q * p^-]^{-1}. \end{aligned}$$

Das zeigt die Gleichung aus der Proposition. □

Wäre h_p ganz unabhängig von p, so könnten wir für wegzusammenhängende Räume den Basispunkt ganz vergessen; so können wir das nicht immer.

Freie Homotopie

Wir werden nun untersuchen, was man über die von homotopen Abbildungen induzierten Homomorphismen sagen kann, wenn die Homotopien den Basispunkt bewegen dürfen.

14.13. Proposition. *Seien X, Y Räume, $x_0 \in X$, $f, g\colon X \to Y$ stetig und $f \simeq g$. Ist $H\colon X \times I \to Y$ eine Homotopie zwischen f und g, $H(\bullet, 0) = f$, $H(\bullet, 1) = g$, und $p\colon I \to X$ der Weg $H(x_0, \bullet)$ in Y, $y_0 := p(0)$, $y_1 := p(1)$, so ist das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "g_\#"] \arrow[dr, "f_\#"'] & \pi_1(Y, y_1) \arrow[d, "h_p", "\cong"'] \\ & \pi_1(Y, y_0) \end{tikzcd}$$

kommutativ. Ist insbesondere eine der beiden Abbildungen $f_\#$, $g_\#$ ein Isomorphismus, so auch die andere.

Beweis. Sei w eine Schleife bei x_0. Wir betrachten die Wege $l, r, t, b\colon I \to I \times I$,

$$b(s) := (s, 0), \qquad t(s) := (s, 1), \qquad l(s) := (0, s), \qquad r(s) := (1, 1-s).$$

Da $I \times I$ konvex ist, ist $b \simeq l * t * r$ rel $\{0, 1\}$. Nun ist

$$\begin{aligned} f \circ w &= H \circ (w \times \mathrm{id}_I) \circ b, & p &= H \circ (w \times \mathrm{id}_I) \circ l, \\ g \circ w &= H \circ (w \times \mathrm{id}_I) \circ t, & p^- &= H \circ (w \times \mathrm{id}_I) \circ r. \end{aligned}$$

Also ist $f \circ w \simeq p * (g \circ w) * p^-$ rel $\{0, 1\}$, das heißt

$$f_\#([w]) = h_p(g_\#([w])).$$

□

14.14. Proposition. *Seien X, Y Räume, $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist für $x_0 \in X$ die Abbildung*

$$f_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $g\colon Y \to X$ eine Homotopieinverse. Wir betrachten

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_\#} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_\#} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_\#} \pi_1(Y, f(g(f(x_0)))),$$

wobei die erste und dritte Abbildung natürlich verschieden sind, obwohl sie gleich bezeichnet sind. Da $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $(\mathrm{id}_X)_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ein Isomorphismus, nämlich die Identität, ist, ist nach der vorherigen Proposition auch $(g \circ f)_\#\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, (g \circ f)(x_0))$ ein Isomorphismus. Also ist die Komposition der ersten beiden Abbildungen unseres Diagrammes ein Isomorphismus. Ebenso folgt aus $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, dass die Komposition der letzten beiden Abbildungen ein Isomorphismus ist. Damit ist die mittlere Abbildung sowohl ein Epimorphismus als auch ein Monomorphismus, also ein Isomorphismus. Daher müssen auch die anderen beiden Abbildungen Isomorphismen sein, insbesondere die erste. □

14.15. Korollar. *Ist X ein zusammenziehbarer Raum und $x_0 \in X$, so ist $\pi_1(X, x_0)$ trivial.*

Beweis. Da homotopieäquivalente Räume isomorphe Fundamentalgruppen besitzen, brauchen wir die Behauptung nur für den einelementigen Raum zu zeigen. In diesem gibt es aber überhaupt nur eine einzige Schleife, nämlich die konstante. □