5. ÜBUNG ZUR VORLESUNG „MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I“ IM WINTERSEMESTER 1999/2000

PROF. DR. BERENDT   CARSTEN SCHULTZ

Aufgabe 13. Bestimme alle Häufungspunkte und Grenzwerte der folgenden Folgen. Gib direkte Beweise mit Hilfe der Definitionen von Grenzwerten und Häufungspunkten an.

(i) $a_n := \sqrt{\frac{1+n}{n}}$,
(ii) $b_n := (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Aufgabe 14. Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 &= 1, \\ a_{n+2} &= \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) \end{aligned}$$

gegeben. Entscheide, ob die Folge konvergent ist, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Tip. Zeige induktiv, dass $a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, und benutze die geometrische Reihe.

Aufgabe 15. Die Fibonacci-Zahlen F_n sind durch

$$\begin{aligned} F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

definiert.

(i) Zeige durch vollständige Induktion, dass

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Tip (zu (ii)).

- Benutze (i).
- Vergleiche die Werte von $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- Die Rechenregeln für Grenzwerte (Vertauschbarkeit mit Addition etc.) dürfen benutzt werden.

Abgabe: am 1. 12. 1999 in der Vorlesung.